

Universität Duisburg-Essen  
Campus Duisburg

---

Physikalisches Grundlagenpraktikum  
für den Bachelor-Studiengang  
Physik

Versuchsanleitungen  
Teil 2b (4.Fachsemester)

## Inhaltsverzeichnis

### Versuche

#### Teil Nr. Bezeichnung

#### 2b Quantenphysik, Atom- und Kernphysik, Festkörperphysik

B 7	Franck-Hertz-Versuch.....	B7.1-6
B 10	Versuch mit Röntgenstrahlen.....	B10.1-14
B 11	Elektronenbeugung.....	B11.1-9
B 12	Geschwindigkeit von $\alpha$ -Teilchen.....	B12.1-9
B 13	Radioaktiver Zerfall.....	B13.1-12
B 15	$\beta$ -Spektroskopie.....	B15.1-10
C 3	Analyse elektrischer und akustischer Schwingungen.....	C3.1-19
C 11	Kennlinien von HL-Diode und Transistor.....	C11.1-13
C 12	Kennlinien von Elektronenröhren.....	C12.1-10
C 13	Transistorverstärker.....	C13.1-13
C 14	Operationsverstärker.....	C14.1-16
C 15	Digitale Schaltungen.....	C15.1-20
D 15	Zeeman-Effekt.....	D15.1-16
D 17	Elektronenspin-Resonanz.....	D17.1-16
D 18	Kernspin-Resonanz.....	D18.1-16

## Versuch B 7: Franck-Hertz-Versuch

**1. Literatur:** Pohl, Elektrizitätslehre  
 Finkelnburg, Einführung in die Atomphysik  
 Schpolksi, Atomphysik, Bd. I  
 Haken/Wolf, Atom- u. Quantenphysik  
 Hellwege, Einführung in die Physik der Atome  
 Berkeley Physik Kurs 4, Quantenphysik

**Stichworte:** Bohrsches Atommodell, Ein- u. Zweielektronenatom, Termsymbole, Termschemata, Spektren, elastische und inelastische Stöße, Elektronenröhren

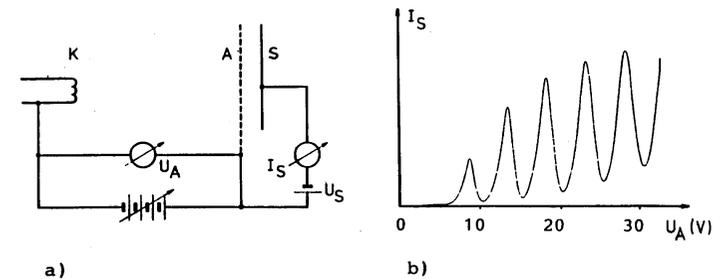
### 2. Grundlagen

Das Rutherford'sche Atommodell besagt, dass ein Atom aus einem positiv geladenen Kern besteht, der sehr klein im Vergleich zur Atomgröße ist und nahezu die gesamte atomare Masse in sich vereinigt, und aus Elektronen, die insgesamt eine gleich große negative Ladung tragen und den Kern in großem Abstand umkreisen (Rutherford 1913). Dieses Modell wurde hinsichtlich seiner Aussagen zum Atomkern durch Streuversuche mit  $\alpha$ -Teilchen an Metallfolien bestätigt, konnte jedoch die Stabilität der Atome und die Natur ihrer Lichtemission (das Auftreten von Linienspektren) nicht erklären. Nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik sollten die durch die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Atomkern und -hülle beschleunigten Elektronen kontinuierlich Strahlung aussenden und aufgrund ihres Energieverlustes in den Atomkern stürzen.

Bohr postulierte, dass die Elektronen den Atomkern auf Bahnen bestimmter Energie strahlungsfrei umlaufen können. Beim Übergang eines Elektrons zwischen diesen Bahnen sollte entsprechend seiner Energiedifferenz  $\Delta E$  in diesen Bahnen das Energiequant  $h\nu$  der elektromagnetischen Strahlung (Licht) mit der Frequenz  $\nu$  emittiert oder absorbiert werden, so dass:

$$\Delta E = h\nu \quad (1)$$

Die von Franck und Hertz im Jahre 1913 durchgeführten Elektronenstoßversuche waren eine direkte experimentelle Bestätigung dieser Quantentheorie des Atoms. Sie zeigen, dass Atome auch durch Stöße mit (freien) Elektronen energetisch angeregt werden können. Hierbei wird die kinetische Energie der Elektronen in Energiequanten  $\Delta E$  auf die Atome übertragen, die ihren charakteristischen Anregungsenergien entsprechen. Abb. 1a zeigt schematisch die von Franck und



**Abb.1:** a) Anordnung des Versuchs von Franck und Hertz  
 b) Messergebnis für  $I_S(U_A)$

Hertz benutzte Versuchsanordnung: In einem evakuierten und mit einem Quecksilbertropfen gefüllten Glaskolben wird durch äußeres Erwärmen auf etwa 150 - 200°C ein Hg-Dampfdruck von einigen mbar erzeugt. In dem Kolben befinden sich die Elektroden K, A und S, die zur Erzeugung freier Elektronen und zur Bestimmung ihrer Energieabgabe bei Stößen mit den Hg-Atomen dienen. Aus der elektrisch beheizten Kathode K treten Elektronen auf Grund ihrer thermischen Energie aus und werden durch das elektrische Feld infolge der Spannung  $U_A$  zur gitterförmigen Anode A hin beschleunigt. Dabei treten sie durch Stöße mit den Hg-Atomen in Wechselwirkung (die mittlere freie Weglänge der Elektronen zwischen zwei Stößen beträgt in Abhängigkeit vom Hg-Dampfdruck einige  $\mu\text{m}$ ). Ein Teil der Elektronen gelangt direkt auf die Anodengitter, der andere Teil wird auf dem Weg zu der hinter A liegenden Gegenelektrode S durch ein Gegenfeld infolge der Spannung  $U_S$  abgebremst, so dass nur solche Elektronen S erreichen können, die eine genügend große kinetische Energie besitzen.

Abb. 1b zeigt den Strom  $I_S$  zur Gegenelektrode in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung  $U_A$  bei einer Bremsspannung  $U_S = 1,2\text{V}$ . Erhöht man die Spannung  $U_A$  von Null an stetig, so steigt für  $U_A > U_S$  der Strom  $I_S$  in Abhängigkeit vom Hg-Dampfdruck und gemäß der Röhrencharakteristik einer Diode im Raumladungsbereich ( $I_S \sim U_A^{3/2}$ ) zunächst monoton an, nimmt jedoch oberhalb einer bestimmten Spannung  $U_{A1}$  wieder ab und durchläuft bei weiterem Ansteigen von  $U_A$  Minima und Maxima, deren Lagen sich jeweils um die gleiche konstante Spannungsdifferenz von etwa 4,9 V unterscheiden. Dieses Verhalten wird durch die Art der Stöße erklärt, welche die Elektronen auf dem Weg zwischen Kathode und Anode an den Hg-Atomen erleiden. Für Spannungen  $U_A < U_{A1}$  sind die Stöße nur elastisch, so dass wegen der sehr verschiedenen Massen der Stoßpartner ( $m_{\text{Hg}}/m_e = 3.7 \times 10^5$ ) praktisch keine kinetische Energie übertragen

wird. Die kinetische Energie der Elektronen, welche die Anode passieren, ist nahezu gleich für alle Elektronen  $E = e(U_A - U_K)$ . Hierbei ist  $e$  die Elementarladung und  $U_K$  die Kontaktspannung zwischen Kathode und Anode ( $eU_K =$  Differenz der elektronischen Austrittsarbeiten aus diesen Elektroden).

Für Spannungen  $U_A - U_K > U_{A1} - U_K = U_1 = 4,9 \text{ V}$  finden zwischen den Elektronen und Hg-Atomen auch inelastische Stöße statt, wobei die Elektronen die Energie  $eU_1$  abgeben, die der Hg-Anregungsenergie zwischen dem Grundzustand  $6^1S_0$  und Resonanzniveau  $6^3P_1$  entspricht. Nach einem inelastischen Stoß besitzen die Elektronen für Beschleunigungsspannungen nur wenig größer als  $U_{A1}$  nicht mehr genügend Energie, um das Gegenfeld zwischen Anode und Gegenelektrode zu überwinden. Dies bewirkt die Abnahme des Stroms  $I_S$ .

Bei weiterem Anwachsen der Spannung  $U_A$  steigt der Strom  $I_S$  wieder an, da mit ihr auch die kinetische Energie der Elektronen zur Überwindung des Gegenfeldes ansteigt. Wenn die um die Kontaktspannung  $U_K$  verminderte Beschleunigungsspannung  $U_A$  das  $n$ -fache der Anregungsspannung  $U_1$  erreicht, finden im Mittel gerade  $n$  inelastische Stöße zwischen einem Elektron und den Hg-Atomen statt, was sich im Auftreten der weiteren Maxima im Strom  $I_S$  äußert.

**Anmerkung:** Mit geänderter experimenteller Anordnung des Franck-Hertz-Versuchs, Abb. 1a, ist es möglich auch weitere Anregungsenergien des Quecksilbers sowie die anderer Atome zu bestimmen. Die der Stoßanregung nachfolgende Rückkehr der Hg-Atome in den Grundzustand ist im vorliegenden Versuch durch die dabei auftretende Lichtemission (an der Anode, s. Versuchsaufbau) zu beobachten. Der direkte Übergang ( $\lambda = 254 \text{ nm}$ ) entsprechend der Energie  $4,9 \text{ eV}$  ist jedoch wegen der geringen Wellenlänge nicht zu sehen.

### 3. Aufgabenstellung

**1. Aufgabe:** Es sind die  $I_S(U_A)$ -Kennlinien einer Franck-Hertz-Röhre bei zwei verschiedenen Temperaturen mit einem xy-Schreiber aufzunehmen:

- bei  $T_1 = \text{ca. } 175^\circ\text{C}$  für  $U_A = 0 - \text{ca. } 30\text{V}$  und  $U_S = 0,5; 1,0; 1,5 \text{ u. } 2\text{V}$
- bei  $T_2 = \text{ca. } 200^\circ\text{C}$  für  $U_A = 0 - \text{ca. } 60\text{V}$  und  $U_S = 2\text{V}$

**2. Aufgabe:** Die Ergebnisse sind graphisch auszuwerten und zu diskutieren. Bestimmen Sie aus der Lage der Maxima der Kennlinien die Anregungsspannung  $U_1$  und vergleichen Sie diese mit dem Literaturwert. Diskutieren Sie mögliche Messfehler.

### 4. Versuchsaufbau

Das Schaltschema des im Versuch benutzten Aufbaus zeigt Abb. 2. Die Franck-Hertz-Röhre befindet sich in einem Gehäuse mit je einem Beobachtungsfenster an der Seiten- und Rückwand. Das Gehäuse wird mit einem elektrisch betriebenen Ofen beheizt, der über einen Bimetallschalter (T) und den Stelltransformator STR an das Wechselspannungsnetz (220 V) angeschlossen ist, so dass in einem weiten Bereich konstante Ofentemperaturen eingestellt werden können. Zur Temperaturmessung dient ein Thermometer (Th). Als Quelle für die Beschleunigungsspannung  $U_A$ , die Gegenspannung  $U_S$  und die Kathodenheizspannung (6,3V) wird ein Röhrennetzgerät mit einem speziellen Vorschaltgerät benutzt, dessen Schaltschema i.w. Abb. 2 links neben der Röhre zeigt: Der Ausgang 0 - 12V des Netzgerätes wird mit dem Spannungsteiler 10k/3,3k im Verhältnis 4:1 zur Erzeugung der Gegenspannung  $U_S$  (0 - 3V) untersetzt, der Spannungsausgang 0 - 60V (bzw. 30V) erzeugt über den Spannungsteiler 10k/2200uF beim Öffnen

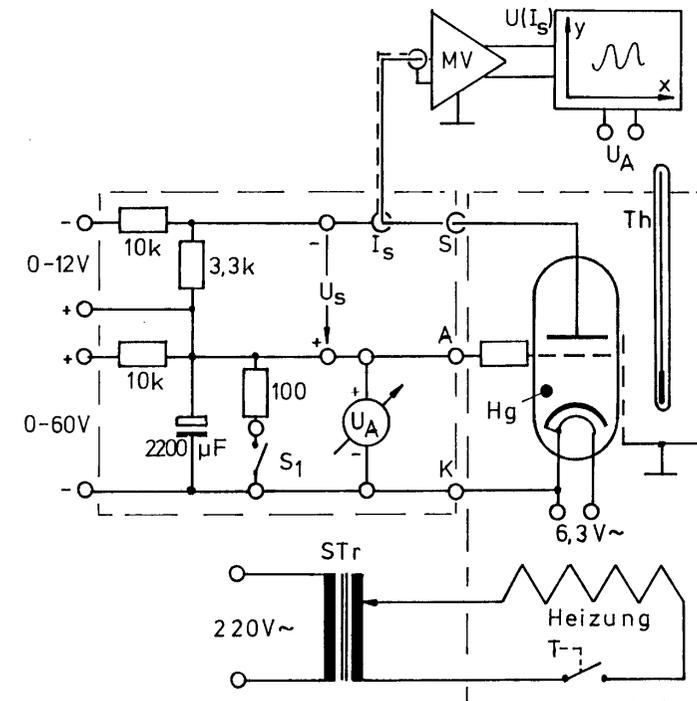


Abb.2: Schaltschema zum Franck-Hertz-Versuch

des Schalters  $S_1$  eine zeitlich ansteigende Spannung  $U_A(t)$  (Ladespannung des Kondensators), die mit einem Spannungsmesser bestimmt wird und zur Aufnahme der Kennlinien am x-Eingang des Schreibers anliegt.

Der Strom  $I_S$  der Röhre (etwa  $10^{-9}$  -  $10^{-8}$  A) wird mit einem Gleichstrommessverstärker gemessen, dessen Ausgang  $U(I_S)$  (ca. 1V) mit dem y-Eingang des Schreibers verbunden ist.

## 5. Versuchsdurchführung

Vor Versuchsbeginn muss die Franck-Hertz-Röhre aufgeheizt werden. Dazu wird bei eingeschalteter Kathodenheizung der Röhre der Heizofen zunächst mit etwa 200 V am Stelltrafo betrieben und der Bimetall-Thermostat an der Ofenseite auf ca. 175°C gestellt. Hat die Röhre eine Temperatur von etwa 160°C erreicht, wird der Trafo auf ca. 140 V zurückgestellt und wenn nötig mit dem Bimetall-Thermostat die gewünschte Temperatur eingeregelt. Der übrige Versuchsaufbau wird gemäß der Schaltskizze, Abb. 2, vorgenommen, die Masseanschlüsse von Verstärker und Röhrengehäuse sind zu verbinden. Machen Sie sich vor der Aufzeichnung der Kennlinien mit der Bedienung des Messverstärkers und des Schreibers vertraut!

Zur Aufnahme der Kennlinien bei etwa 175°C sind folgende Einstellungen nötig:

Messverstärkerbereich:  $10^{-8}$  A  
Schreiber, y-Eingang: 0,1V/cm var.: = ca. 30mV/cm  
Schreiber, x-Eingang: 1V/cm cal.

Die 4 Kennlinien sind, wenn möglich, nach einem Probedurchlauf (Starten und Beenden durch Öffnen u. Schließen von  $S_1$ ) für alle Gegenspannungen  $U_S$  gemeinsam auf ein DIN A4-Millimeterblatt zu zeichnen.

Zur Aufnahme der Kennlinie bei ca. 200°C sind folgende Einstellungen vorzunehmen:

Messverstärkerbereich:  $10^{-9}$  A  
Schreiber, y-Eingang: 0,1V/cm var.: = ca. 30mV/cm  
Schreiber, x-Eingang: 10V/cm var.: = ca. 2V/cm

**Anmerkung:** Wird die Röhre bei ca. 200°C betrieben, sollte die Kennlinie im Bereich  $U_A < 60V$  etwa 10 Maxima u. Minima aufweisen. Bei kleineren Temperaturen, liegt die Zündspannung für eine Glimmentladung der Röhre (was ist das?) unterhalb 60V, so dass ein entsprechend kleinerer Bereich für  $U_A$  gewählt werden muss. Eine Aufnahme der Kennlinie während der Glimmentladung ist für

diesen Versuch nicht sinnvoll. Das Einsetzen der Glimmentladung ist an einer Stufe in der Kennlinie der Röhre und an der Lichtemission der Hg-Atome in der Nähe der Kathode zu erkennen. Sie bewirkt zugleich ein Ansteigen des Anodenstroms. Der Schutzwiderstand (direkt am Anodengitter, s. Abb. 2) begrenzt den Strom und verhindert die Zerstörung der Kathode bzw. erhöht ihre Lebensdauer.

## 6. Versuchsauswertung:

Die Kennlinien sind zu beschriften (Skalierung und Nullpunkte der Achsen, Angabe der jeweiligen Bremsspannung als Kurvenparameter). Die Maxima der Kurven sind zu kennzeichnen, ihre Abstände zu ermitteln. Die Mittelwerte der Abstände der Maxima sowie die Standardabweichung sind getrennt für beide Temperaturen  $T_1$  u.  $T_2$  zu ermitteln und die Ergebnisse mit dem Literaturwert zu vergleichen. Diskutieren Sie den Verlauf der Kennlinien und mögliche Fehler Ihrer Messungen!

## 7. Fragen zur Selbstkontrolle:

- 1) Deuten Sie den Verlauf der  $I_S(U_A)$ -Kennlinie.
- 2) Warum geht der Strom  $I_S$  in den Minima nicht auf Null zurück?
- 3) Warum benutzt man eine Gegenspannung  $U_S$ ?
- 4) Welchen Einfluss hat die Temperatur der Franck-Hertz-Röhre auf den Strom  $I_S$ ?
- 5) Welche Anregung findet im Hg-Atom statt? (Termbezeichnungen)
- 6) Welche Wellenlänge besitzt das vom Hg-Atom nach der Stoßanregung ausgesandte Licht und wie weist man es nach?

## Versuch B 10: Versuch mit Röntgenstrahlen

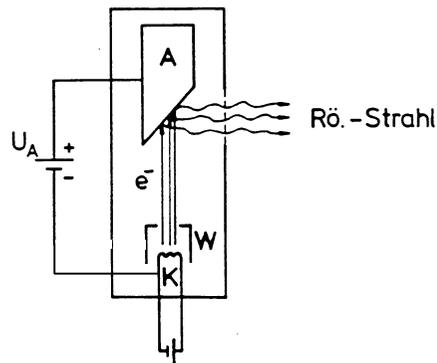
**1. Literatur:** Harbeck, Physik Oberstufe  
 Gerthsen, Kneser, Vogel, Physik  
 Pohl III, Optik u. Atomphysik  
 Finkelnburg, Atomphysik  
 Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen

**Stichworte:** Erzeugung von Röntgenstrahlen, Röntgenbremsspektrum, Bohrsches Atommodell, Termschema der Atome, charakteristisches Röntgenspektrum, Moseley Gesetz, Absorptionsspektrum, Kristallgitter (Netzebenen), Braggsches Reflexionsgesetz, Nachweis von Röntgenstrahlung, Funktionsweise eines Zählrohres

## 2. Grundlagen

### 2.1 Röntgenbremsspektrum

In einer Röntgenröhre (siehe schematische Darstellung in Abb. 1) erzeugt man durch thermische Emission aus einer Glühkathode K freie Elektronen, bündelt sie mit einem Wehneltzylinder W und beschleunigt sie (im Vakuum) zur Anode A hin durch die Anodenspannung  $U_A$ .

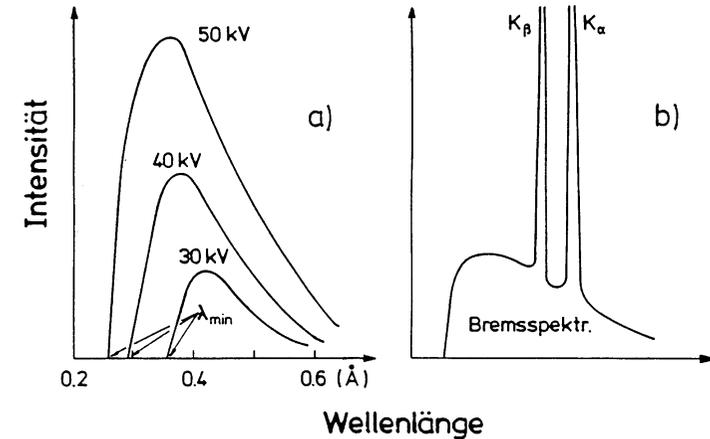


**Abb.1:**

Röntgenröhre  
(schematisch)

Beim Auftreffen auf die Anode (Material z.B. W oder Cu) werden diese Elektronen in den Elektronenhüllen der Atome der Anode durch Coulombwechselwirkung (was ist das?) abgebremst. Dabei wird ein Teil ihrer

kinetischen Energie ( $\frac{1}{2} mv^2 = eU_A$ ) in elektromagnetische Strahlung, der andere (größere) Teil in Wärme umgewandelt. Es entsteht Röntgenstrahlung mit einem kontinuierlichen Spektrum, dem sog. *Röntgenbremsspektrum* (weißes Röntgenlicht, erstmals entdeckt von W. Röntgen, 1895).



**Abb.2:** a) Röntgenbremsspektrum, b) Röntgenbrenms- und Linienpektrum (schematisch)

Abbildung 2a zeigt die spektrale Verteilung der Röntgenbrenmsstrahlung. Das Bremsspektrum ist vom Anodenmaterial unabhängig und besitzt eine allein von der vorgegebenen Anodenspannung abhängige, kurzwellige Grenze  $\lambda_{\min}$ . An dieser Grenze wird die gesamte kinetische Energie eines Elektrons auf einmal in Strahlung umgesetzt und es gilt die Beziehung:

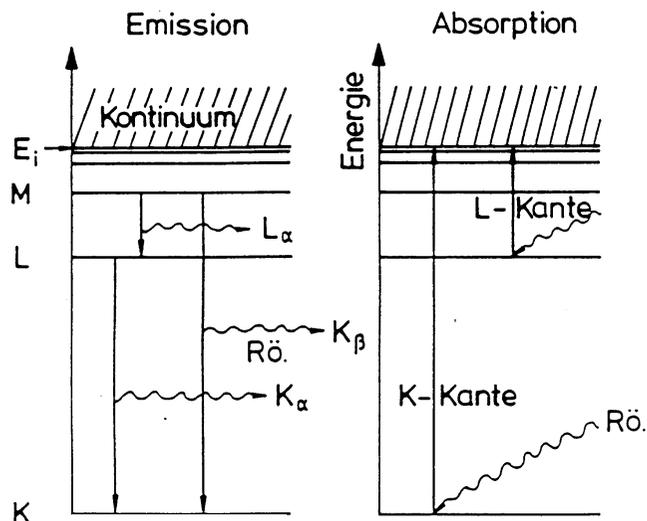
$$\frac{1}{2} mv^2 = eU_A = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \quad (1)$$

Dies bedeutet,  $\lambda_{\min}$  bzw. die Maximalfrequenz  $\nu_{\max}$  des Röntgenbremsspektrums sind bei vorgegebener Spannung  $U_A$  allein durch die Elementarladung  $e$  und das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  bestimmt.

Für viele technische Zwecke und auch im vorliegenden Versuch liegen die Beschleunigungsspannungen  $U_A$  im Bereich 20 - 50 kV und damit die Wellenlängen des Röntgenlichts (gem. Gl. 1) im Bereich unter  $1 \text{ \AA} (= 10^{-10} \text{ m})$ .

## 2.2 Linienspektrum

Das in Abb. 2a gezeigte Bremspektrum ist meist noch von einer charakteristischen Eigenstrahlung der Atome der Anode überlagert. D.h. bei bestimmten Wellenlängen treten zusätzliche Röntgenlinien mit im Vergleich zum Bremspektrum hoher Intensität auf (siehe Abb. 2b). Diese Linien werden durch elektronische Übergänge in den Atomen des Anodenmaterials hervorgerufen.



**Abb.3:** Termschema eines Atoms mit Vorgängen bei der Emission und Absorption von Röntgenlicht ( $E_i$  = Ionisierungsenergie)

Ihr physikalischer Ursprung kann im Rahmen des Bohrschen Atommodells leicht verstanden werden (vergl. Abb.3): Ein auf die Anode auftreffendes Elektron schlägt z.B. aus der (energetisch) untersten Schale (K-Schale) eines Atoms der Anode ein Elektron heraus. Beim Übergang eines Elektrons, z.B. aus der nächsthöheren Schale (L-Schale) des Atoms, auf den freien Platz in der K-Schale wird ein der Energiedifferenz der Schalen  $\Delta E = h \nu = h c / \lambda$  entsprechendes charakteristisches Strahlungsquant (Röntgenphoton) ausgesandt, durch Übergänge z.B. von L nach K erscheint im Spektrum die sog.  $K_\alpha$ -Röntgenlinie.

Übergänge von der M-Schale auf die K-Schale führen zur  $K_\beta$ -Linie, analog

Übergänge von M nach L zur  $L_\alpha$ -Linie, usw. Je nach energetischer Lage der Terme eines Atoms entsteht so das charakteristische oder Linienspektrum. Die Änderung der Frequenz bzw. Wellenlänge dieser Linien von Element zu Element des Anodenmaterials ist vom Quadrat der Ordnungszahl  $Z$  des betreffenden Elements im Periodensystem abhängig. Es gilt z.B. für die  $K_\alpha$ -Linie:

$$\nu_{K_\alpha} = \frac{3}{4} (Z - \sigma)^2 Ry, \quad \sigma = 1 \quad \text{Moseley - Gesetz} \quad (2)$$

mit der Rydbergfrequenz  $Ry = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Die Abschirmkonstante  $\sigma$  berücksichtigt die Abschirmung der Kernladung durch kernnahe Atomelektronen.

## 2.3 Absorptionsspektrum

Die Schwächung von Röntgenstrahlung in Materie wird verursacht durch klassische (elastische) Streuung (Richtungsänderung der Röntgenphotonen ohne Energieabgabe an die durchstrahlte Materie), Comptonstreuung (teilweise Energieabgabe des Photons an freie oder lose gebundene Elektronen) und durch Absorption. Das Absorptionsvermögen eines Stoffes wird durch den Absorptionskoeffizienten  $\tau_A$  beschrieben. Er hängt stark von der Ordnungszahl  $Z$  des Absorbermaterials und der Wellenlänge  $\lambda$  der Strahlung ab ( $\tau_A \sim Z^4 \lambda^3$ ). Bei der Absorption werden Elektronen von inneren Schalen der Atome des Absorbermaterials unter Aufnahme der gesamten Photonenenergie energetisch angeregt. Aus der Darstellung, Abb.3, geht hervor, dass im Absorptionsspektrum der Röntgenstrahlung keine charakteristischen Linien - wie bei der Emission - beobachtet werden können. Dies würde z.B. bei der  $K_\alpha$ -Linie das Anheben eines Elektrons von der K- auf die L-Schale erfordern. Diese Schale und auch die nächsthöheren sind jedoch i.a. bei den Elementen höherer Ordnungszahlen besetzt, so dass Übergänge bei Absorption bis zur Ionisierungsgrenze oder höher (ins sog. Kontinuum) erfolgen müssen. Es entsteht das beispielhaft in Abb. 4 gezeigte Röntgenabsorptionsspektrum, in dem neben dem Anstieg ( $\tau_A \sim \lambda^3$ ) sog. Absorptionskanten bei den für das Termschema des betreffenden Elements charakteristischen Wellenlängen auftreten. Die energetische Lage der Kanten (s. Abb. 3) ist wieder - bei Übergang von Element zu Element - durch das Moseley Gesetz, ähnlich (Gl. 2) gegeben.

$$\nu_K = (Z - \sigma)^2 Ry, \quad \sigma \approx 1 \quad (3)$$

Durch geschickte Kombination des Anodenmaterials der Röhre (im vorliegenden Versuch Molybdän,  $Z = 42$ ) und eines in den Strahlengang des austretenden

Röntgenspektrums geschalteten, absorbierenden Filtermaterials (hier z.B. Zirkon,  $Z = 40$ ) kann man erreichen, dass das austretende Röntgenspektrum (Bremspektrum und charakteristisches Mo-Spektrum) im kurzwelligen Bereich so stark geschwächt wird, dass im wesentlichen nur die Mo  $K_{\alpha}$ -Linie, also monochromatisches Röntgenlicht mit  $\lambda_{K_{\alpha}} = 0,711 \text{ \AA} = 71,1 \text{ pm}$  erhalten bleibt.

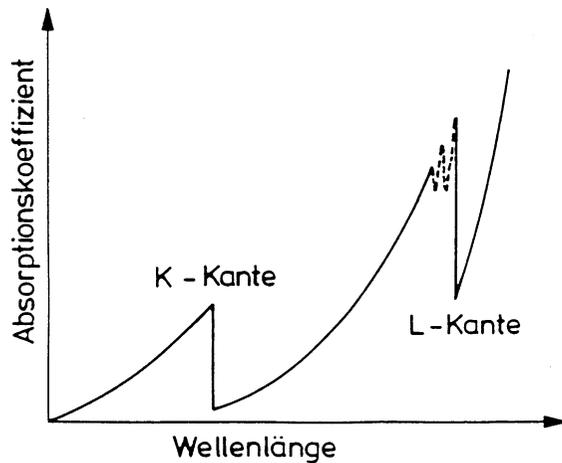


Abb.4: Röntgenabsorptionsspektrum (schematisch)

## 2.4 Nachweis von Röntgenstrahlen

Röntgenstrahlen können durch ihre ionisierende Wirkung (Ionisationskammer, Zählrohre, Schwärzung von Photoplatten) nachgewiesen werden. Zum Verständnis der Arbeitsweise des hier verwendeten Geiger-Müller-Zählrohrs studiere man die angegebene Literatur.

## 2.5 Braggsche Reflexion von Röntgenstrahlen

Historisch gesehen bemühte sich Röntgen vergebens, den Nachweis zu führen, dass es sich bei der Röntgenstrahlung um elektromagnetische Wellen handelt. Er konnte weder Beugung noch Interferenzerscheinungen beobachten. Dies gelang erst 1912 v. Laue, der auf den Gedanken kam, Kristallgitter als Beugungsgitter für Rö-Strahlen zu benutzen. Kristalle bilden Raumgitter mit den Atomen auf festen Gitterplätzen (Gitterebenen oder Netzebenen) mit Abständen in der Größenordnung von  $\text{\AA}$ , d.h. von der Größenordnung der Wellenlänge des Rö-Lichts. (Warum ist das wichtig? Man überlege sich die Analogie zum Beugungsversuch D7).

Die Netz- oder Gitterebenen von Kristallen (im vorliegenden Versuch NaCl und LiF mit einfach kubischer Struktur) reflektieren Röntgenlicht mit einer bestimmten Wellenlänge  $\lambda$  nur unter ganz bestimmten Winkeln (sog. *Glanzwinkeln*). Da die Röntgenstrahlung in die Kristalle eindringt, spielen für die Reflexionen mehrere Netzebenen und damit der Netzebenenabstand  $d$  eine Rolle.

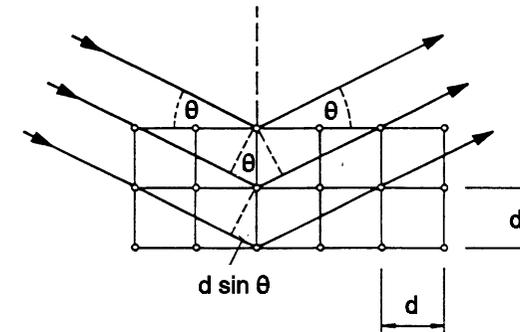


Abb.5: Braggsche Reflexion am Einkristall

Die Vorgänge verdeutlicht vereinfacht Abb. 5. Monochromatisches Rö-Licht fällt unter einem Winkel  $\theta$  auf die zueinander parallelen, im Abstand  $d$  voneinander angeordneten Netzebenen eines Einkristalls (was ist das?) und wird an diesen Netzebenen reflektiert. *Braggsche Reflexion*, d.h. Intensitätsverstärkung der unter dem Winkel  $\theta$  ausfallenden Strahlen erfolgt nur dann, wenn der Gangunterschied benachbarter Strahlen gleich einem ganzzahligen Vielfachen  $n$  der Wellenlänge  $\lambda$  ist. Der Gangunterschied berechnet sich in einfachster Weise aus den geometrischen Verhältnissen entsprechend Abb. 5. Es gilt:

$$n\lambda = 2d\sin\theta_n \quad \text{Braggsche Gleichung} \quad (4)$$

Die Reflexion an den Netzebenen kann physikalisch folgendermaßen verstanden werden: Jeder Gitterbaustein des Kristalls führt unter Einstrahlung einer elektromagnetischen Welle (Rö-Strahl) erzwungene (Dipol-) Schwingungen aus und sendet in alle Raumrichtungen Strahlung der Wellenlänge  $\lambda$  aus. Diese Strahlen verstärken sich durch positive Interferenz in Reflexionsrichtung, während sie sich in anderen Richtungen auslöschen. Da die Interferenzmaxima besonders intensiv sind, hat man den Eindruck, als ob der Kristall die einfallende Strahlung unter festen Winkeln  $\theta_1, \theta_2, \text{etc.}$  reflektiert.

Mit Braggscher Reflexion kann man also den Netzebenenabstand  $d$  eines unbekanntes Gitters bestimmen, wenn die Wellenlänge  $\lambda$  des verwendeten monochromatischen Röntgenlichts bekannt ist, oder umgekehrt  $\lambda$ , wenn der Netzebenenabstand  $d$  des verwendeten Kristalls bekannt ist. Das erste hat technische Bedeutung bei der Strukturbestimmung von Kristallen (Debye-Scherrer-Verfahren, Drehkristall-Verfahren) wie überhaupt die Untersuchungen mit Röntgenstrahlen in der Materialprüfung einen breiten Raum einnehmen.

### 3. Aufgabenstellung

**1. Aufgabe:** Mit dem Röntgengerät ist die Intensität der an einem LiF-Einkristall reflektierten Röntgenstrahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$  für vier verschiedene Anodenspannungen  $U_{AS}$  zu bestimmen ( $d_{LiF} = 201,4 \text{ pm}$ ). Aus den der Intensität entsprechenden Kurven  $R(\lambda)$  der von einem Zählrohr registrierten Impulsrate  $R$  ist die kurzwellige Grenze  $\lambda_{min}$  des Röntgenspektrums graphisch zu bestimmen und aus der Auftragung  $e U_{AS} = f(v_{max})$  die Plancksche Konstante  $h$ .

**2. Aufgabe:** Mit dem Röntgengerät (Mo-Anode und vorgeschaltetem Zr-Filter:  $\lambda_{K\alpha} = 71,1 \text{ pm}$ ) sind für einen NaCl-Einkristall die Braggschen Winkel  $\theta$  zu bestimmen. Berechnen Sie daraus den Netzebenenabstand  $d$  von NaCl und vergleichen Sie diesen mit dem Literaturwert  $d_{NaCl} = 282,5 \text{ pm}$ .

**3. Aufgabe:** Mit dem Röntgengerät und dem NaCl-Kristall ist in einem begrenzten Winkelbereich die Zählrate  $R(\theta)$  sowohl ohne Filter als auch mit Filtern aus den Elementen Zr, Mo, Ag und In zu bestimmen. Aus dem Verhältnis der Raten der gefilterten Spektren zu der des ungefilterten Spektrums sind die Wellenlängen der K-Kanten  $\lambda_K$  für diese Elemente zu bestimmen. Aus der Auftragung  $1/\lambda_K(Z^2)$  ist das Moseleysche Gesetz Gl. (3) zu bestätigen.

### 4. Versuchsaufbau

#### 4.1 Versuchsanordnung

Abb. 6 zeigt das im Versuch benutzte Röntgengerät, Abb. 7 den gesamten Versuchsaufbau schematisch. Die von der Röntgenröhre erzeugte Röntgenstrahlung tritt durch eine Blende (Kollimator), in die ein Filter (z.B. eine Zr-Folie)

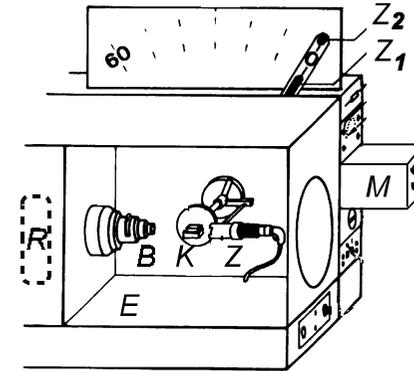


Abb.6:

Röntgengerät mit Röntgenröhre, Experimentierkammer, Blende, Kristall, Zählrohr, Zeiger 1 ( $\theta$ ), Zeiger 2 ( $2\theta$ ), Motorantrieb ( $2\theta$ )

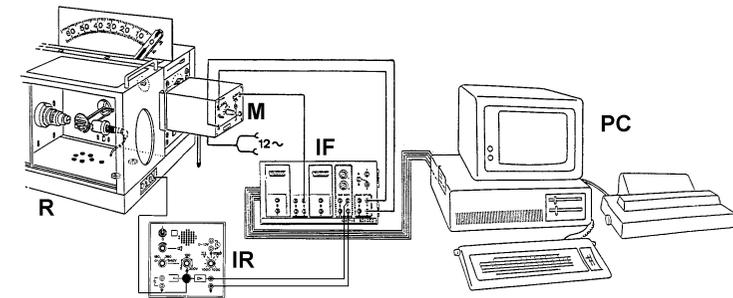


Abb.7: Versuchsaufbau mit Röntgengerät, Motorantrieb für  $\theta$ ,  $2\theta$ , Impulsratenmesser, Interface, Personal-Computer mit Drucker

eingeschoben werden kann, in die Experimentierkammer und trifft dort auf einen Kristall (LiF o. NaCl), der an einer senkrecht zur Strahlrichtung drehbaren Achse befestigt ist. Die Winkelstellung  $\theta$  der Kristalloberfläche (= Lage der Netzebenen, s. Abb. 5) zum einfallenden Röntgenstrahl wird mit einem Zeiger auf einer Winkelskala angezeigt. Um die gleiche Drehachse ist das Zählrohr zur Intensitätsmessung der reflektierten Rö-Strahlung drehbar, dessen Winkelstellung  $2\theta$  zum einfallenden Rö-Strahl mit einem weiteren, längeren Zeiger auf einer parallel zu  $\theta$  liegenden  $2\theta$ -Skala angezeigt wird. Beide Winkelstellungen sind durch Drehknöpfe an der Seite des Geräts verstellbar und über eine mech. Kopplung so verbunden, das bei Verstellen der einen die andere jeweils entsprechend nachgeführt wird. Bei der Stellung  $2\theta = \theta = 0$  stehen beide Zeiger übereinander. Vor den Stellknopf für den Winkel  $2\theta$  ist ein Motortrieb montiert, welcher über ein Interface von einem Computer gesteuert wird. Entsprechend der

Winkelposition des Motors wird an einem Potentiometer, welches mittels Rutschkupplung mit der Motorachse verbunden ist, eine Spannung im Bereich  $\pm 3V$  abgegriffen, die am Eingang C des Interface anliegt. Über den Zählereingang F dieses Interface wird ebenfalls die (der Strahlungsintensität proportionale) Impulsrate R des Zählrohrs registriert, so dass eine automatische Aufnahme der Zählrate  $R(\theta)$  (bzw.  $R(\lambda)$ ) bei bekanntem Netzebenenabstand unter Benutzung der Zählrate Bragg'schen Gleichung) möglich ist. Die Benutzung eines Computers macht es zudem möglich, die Rate  $R(\theta)$  oder  $R(\lambda)$  während der Messung auf dem Monitor sofort graphisch darzustellen und zu beurteilen sowie die Messergebnisse im Anschluss weiter zu verrechnen, zu speichern und als Tabelle oder Graph auszudrucken.

*Beachte!* Der Motorantrieb wird durch eine 12 V~ Spannungsquelle versorgt. Diese ist erst bei laufendem Messprogramm anzuschließen. Sollte der Motor vor oder während der Messung (unbeabsichtigt) durchlaufen, so ist die Spannungsversorgung zu unterbrechen, evtl. eine neue Winkelkalibrierung (s.u.) durchzuführen.

Zusätzlich zu beachten ist, dass der reglbare Emissionsstrom der Röntgenröhre während der Messung konstant bleibt (ca. 1 mA). Dieses wird mit einem Gleichstrommesser (o. Abb.) kontrolliert. Ein Wechselspannungsmesser (o. Abb.) dient darüber hinaus zur Bestimmung des Scheitel(=Maximal-)werts  $U_{AS}$  der stufenweise (1...8) einstellbaren Anodenspannung  $U_A$ . Dieser ergibt sich aus dem gemessenen Effektivwert der Wechselspannung U über die Beziehung

$$U_{AS} = \sqrt{2} 10^3 U$$

Zur Abschirmung der Umgebung von der Röntgenstrahlung des Röntgengerätes sind die Röntgenröhre selbst und die Experimentierkammer durch Stahlplatten und Bleiglasfenster umschlossen (warum Bleiglas?). Das seitliche Fenster kann nur bei abgeschalteter Anodenspannung, z.B. zur Montage des Kristalls, geöffnet werden. Der Betrieb der Röntgenröhre (eingeschaltete Anodenspannung) wird durch eine rote Warnlampe auf der Oberseite des Gerätes angezeigt.

## 4.2 Programmierung

Die Durchführung der Messungen geschieht mit dem Unterprogramm *Bragg-Reflexionen* des Programms *BRAGG*, welches von der Festplatte in den Arbeitsspeicher des DOS-Rechners geladen wurde. Ein weiteres Unterprogramm *XYZ-Input* erlaubt die Verrechnung von Messdaten innerhalb einer Messdatei, wie z.B. die Bildung des Transmissionskoeffizienten  $T_1 = R_1(\theta)/R_0(\theta)$ , dem Ratenverhältnis

eines gefilterten zu dem des ungefilterten Spektrums für die 3. Aufgabe des Versuchs. Dazu müssen jedoch zuvor jeweils zwei Messdateien, z.B.  $R_0(\theta)$ , das Spektrum ohne Filter und  $R_1(\theta)$ , das mit einem Filter, die im Programm *Bragg-Reflexionen* erstellt und gespeichert wurden, zu einer neuen Datei kombiniert werden. Dies geschieht außerhalb des Programms *BRAGG* durch das Utility-Programm *DTITrans*.

Das Programm *BRAGG* ist menügeführt und wird im wesentlichen gesteuert durch die Cursor-Tasten (Auswahl von Menüpunkten), die Return-Taste (Aktivierung eines Menüpunktes bzw. Bestätigung der Eingabe von Parametern etc.), die Esc-Taste (Verlassen einer Menüebene bzw. Bildschirmgraphik, Abbrechen einer Eingabe oder Messung, Rücksetzung einer Fehlermeldung) sowie der Funktionstasten F1 - F10 (haupts. F1 u. F2 für Befehle im Graphikmodus des Bildschirms).

Ist der Menübildschirm von *Bragg-Reflexionen* gewählt, stehen im **Kopfbereich** alle wichtigen Parameter des laufenden Messprogramms bzw. der aktuell erstellten oder geladenen Messdatei, im **Hauptmenü** die Befehle: - *Messung starten* - *Kalibrieren / Bereiche* (Kalibrierung der Winkel, Einstellung von Bereich und Schrittweite der Winkel sowie der Messzeit) - *Formel wählen* (Umrechnung von Parametern) - *Diskettenoperation* - *Beschreibung/Kommentar* - *Ende* -.

Nach einer Messung bzw. dem Laden einer Messdatei ist das **Hauptmenü** automatisch um die Punkte: - *Messwerte ausgeben* - *Graphisch auswerten* - *Darstellung auswählen* - erweitert. Im Menüpunkt - *Messwerte ausgeben* - können die erstellten bzw. geladenen Messdaten in Tabellenform angezeigt oder ausgedruckt werden, im Menüpunkt - *Graphisch auswerten* - werden die Daten als Graph dargestellt, wobei im Menüpunkt - *Darstellung auswählen* - die Wahl der Achsen, die Messpunktdarstellung sowie weitere Optionen möglich sind.

Zur späteren graphischen Auswertung der Messdaten kann der Bildschirminhalt durch gleichzeitiges Drücken der Tasten *Shift* u. *PrtSc* bzw. *Shift* u. *Druck* auf den Drucker ausgegeben werden.

Das Unterprogramm *XYZ-Input* ist entsprechend strukturiert. Unter dem Menüpunkt *Parameter/Formel* kann die aus den Messdaten zu berechnende Größe definiert werden.

## 5. Versuchsdurchführung und Auswertung

### 5.0 Versuchsbeginn, Winkelkalibrierung u. Winkelkorrektur

Zuerst ist der Computer mit Drucker, danach das Röntgengerät (zunächst ohne

Hochspannung), der Ratemesser, zuletzt die Spannungsversorgung des Stellmotors einzustellen.

Im allg. ist vor Versuchsbeginn eine Kalibrierung der Winkeleinstellung des Motors nötig. Dazu wird der Menüpunkt *Kalibrieren/Bereiche* danach *Winkelkalibrierung* gewählt, dann F1, wonach die auf dem Bildschirm dargestellte Spannung U des Motorpotentiometers auf den Wert von ca. -2,95 V gefahren wird, welcher der Winkelstellung  $2\theta = \theta = 0$  entsprechen sollte. Eine geringfügige Verstellung der Zeiger ist durch die Tasten +/-S (größerer / kleinerer Winkel / Stop) möglich. Sollte auf diese Weise ( $U \geq -3$  V) die Nullstellung des  $2\theta$ -Zeigers nicht möglich sein, so ist der Motor mittels der Rändelschrauben von der Frontplatte des Gerätes zu lösen, die Nullstellung per Hand vorzunehmen, danach der Motor (U: ca. -2,95 V) wieder anzubringen und dann die Feineinstellung mit +/-S vorzunehmen. Die Nullstellung wird durch F2 bestätigt, d.h. der eingestellte Spannungswert als  $2\theta = \theta = 0$  übernommen. Die am Gerät eingestellte  $2\theta/\theta$ -Kopplung (Offset  $\Delta_1$  für  $\theta$  bei  $2\theta = 0$ ) ist gerätespezifisch und sollte nicht verändert werden. (Fragen Sie den stud. Betreuer!).

Darauf wird mit den Tasten +/-S der Winkel  $2\theta = 60^\circ$  angefahren. Die nun im Bildschirm angezeigte Spannung entspricht  $\theta = 30^\circ$ , was wieder durch F2 bestätigt wird. Danach ist die Kalibrierung beendet und kann mit ESC verlassen werden.

In der Auswertung der Versuchsergebnisse muss berücksichtigt werden, dass die Spektren um einen Winkel  $\Delta$  versetzt erscheinen. Dieser Winkelfehler hängt stark von der benutzten Kristalloberfläche und ihrer Lage im Kristallhalter ab.  $\Delta$  kann für die 2. und 3. Aufgabe mit Hilfe der Bragg-Gleichung bestimmt werden. Sind  $\theta_1^m$  und  $\theta_2^m$  die gemessenen Winkel für das Intensitätsmaximum in 1. und 2. Ordnung, so gilt für die Winkelkorrektur  $\Delta = \theta_1 - \theta_1^m = \theta_2 - \theta_2^m$  mit der Randbedingung, dass aus den korrigierten Winkeln  $\theta_1$  und  $\theta_2$  jeweils der gleiche Netzebenenabstand für NaCl resultiert, die Beziehung

$$\tan \Delta = \frac{\sin \theta_2^m - 2 \sin \theta_1^m}{2 \cos \theta_1^m - \cos \theta_2^m} \quad (5)$$

### 5.1 1. Aufgabe:

Die Messung wird mit dem LiF-Kristall **ohne** Filter für 5 verschiedene Anodenspannungen (Stufen 4 - 8) durchgeführt. Einschalten der Hochspannung und Emission **nur durch den studentischen Betreuer!** Die jeweiligen Spannungen  $U_{\text{eff}}$  sind zu notieren u. direkt die Hochspannung  $U_{\text{AS}}$  zu berechnen!

### Vor der 1. Messung:

Kalibr./Bereiche: Winkelbereich:  $\theta: 3 - 8^\circ, \Delta\theta: 0,4^\circ$   
Torzeit:  $\tau: 10$  s  
Einkristall def.: LiF (für Umrechn.  $\theta - \lambda$ )

Messung: starten: F1

### Nach jeder Messreihe:

Darstellung ausw.: x-Achse wählen: l (wie  $\lambda$ ) (in pm)  
Messwerte ausgeben: Tabelle drucken: .. , darauf Spannungsstufe und  $U_{\text{AS}}$  zur Auswertung notieren  
Diskettenoperation: Messdaten speichern: Filename: VER1SpannungsstufeGr.-Nr. (z.B. VER18202)

### Nach allen Messreihen der 1. Aufgabe:

Diskettenoperation: Multigraphik ein: Messreihen nacheinander laden: VER1...., VER1...., (alle Dateien für einen gemeinsamen Graph laden)  
Graphisch auswerten: Bildschirmausdruck zur späteren Auswertung

In der Auswertung ist der Untergrund der Spektren (s. Messbeispiel als Aushang am Messplatz) bei kleinen Wellenlängen zu großem l hin, der Intensitätsabfall bei großen Wellenlängen zu kleinem l hin extrapolieren. Der Schnittpunkt der Extrapolationen liegt bei  $I_{\text{min}}$ . Bestimmen Sie die Plancksche Konstante aus der Auftragung  $c/I_{\text{min}}(eU_{\text{AS}})$ . (Proportionalität:  $I_{\text{min}}^{-1} \sim U_{\text{AS}}$  !)

### 5.2 2. Aufgabe:

Die Messung ist mit NaCl-Kristall und **mit** Zr-Filter, Spannungsstufe 8. durchzuführen.

### Vor der Messung:

Diskettenoperation: Multigraphik löschen:  
Messdaten laden: (letzte Messdatei nur zur Übernahme der Winkelkalibrierung)  
Kalibr./Bereiche: Winkelbereich:  $\theta: 2 - 25^\circ, \Delta\theta: 0,2^\circ$   
Torzeit:  $\tau: 5$  s

Messung: starten: F1

**Nach der Messung:**

Darstellung ausw.: x-Achse wählen:  $\theta$  (in  $^\circ$ )  
 Graphiktitel eingeben: NaCl-Zr  
 Graphisch auswerten: Bildschirmausdruck zur späteren Auswertung  
 Diskettenoperation: Messdaten speichern: Filename:  
 VER2Gr.-Nr. (z.B. VER2202)  
 Messwerte ausgeben: Tabelle drucken (zur späteren Auswertung und  
 Korrektur der Maximawinkel)

**5.3 3. Aufgabe:**

Die Messung wird mit dem NaCl-Kristall ohne Filter und mit Filtern in der Reihenfolge Zr, Mo, Ag, In durchgeführt; Spannungsstufe 8.

**Vor der 1. Messung:**

Kalibr./Bereiche: Winkelbereich:  $\theta: 3 - 10^\circ, \Delta\theta: 0,25^\circ$   
 Torzeit:  $\tau: 10 \text{ s}$

**Messung:** starten: F1

**Nach jeder Messreihe:**

Darstellung ausw.: x-Achse wählen:  $\theta$  (in  $^\circ$ )  
 Graphiktitel eingeben: NaCl + ..  
 Diskettenoperation: Messdaten speichern: Filename:  
 VER30Gr.-Nr. bis VER34Gr.-Nr.  
 (z.B. VER30202 bis VER34202)

Zur Auswertung der Daten BRAGG verlassen und nach - cd \cassy\files - mit dem Befehl: - dtitrans\\_VER30Gr.-Nr..dbg\\_VER31Gr.-Nr..dbg\\_VER31Gr.-Nr..dti - die beiden zuerst genannten, vom Programm Bragg-Reflexionen mit der Kennung \*.dbg gespeicherten Dateien in die zuletzt genannte Datei mit der Kennung \*.dti zusammenfügen. Die darauf folgende Abfrage der ersten und zweiten Größe und des Parameters der neuen Datei ist mit den Ziffern 13 (R1 = Rate VER30.. in 1/s), 23 (R2 = Rate VER31.. in 1/s) und 12 ( $\theta$  in  $^\circ$ ) zu beantworten. Ebenso ist die Datei VER30.. auch mit den drei anderen zu kombinieren. Danach ist zum Programm BRAGG und dem Unterprogramm XYZ-Input zur Berechnung, Darstellung und Ausgabe der Fkt.  $T(\theta, R_1, R_0)$  zurückzukehren:

Diskettenoperation: Messdaten laden: erste Datei VER31Gr.-Nr..dti  
 Paramater/Formel: Formel eingeben:  
 Physikal. Symbol: T

Nachkommastellen: 3

Formel:  $T(n, \theta, R1, R2) = R2/R1$

Darstellung ausw.: x-Achse:  $\theta$   
 y<sub>1</sub>-Achse: T  
 Graphiktitel: z.B. NaCl + Zr  
 Optionen w.: Messpunkte als Kreuze  
 Graphisch auswerten: Bildschirmskopie zur graphischen Auswertung

Auf gleichem Papier im Anschluss:

Messwerte ausgeben: Tabelle drucken

Ebenso ist mit den anderen 3 Dateien zu verfahren. In der graphischen Auswertung ist der Mittelwert zwischen Maximum und Minimum von T im Bereich der K-Kante zu markieren, der entsprechende Winkel zu bestimmen und mit  $\Delta$  (s. 2. Aufgabe) zu korrigieren. Nach Berechnung der Wellenlängen  $\lambda_K$  für die K-Kanten der verschiedenen Filterelemente ist mit einer Auftragung  $1/\lambda_K(Z^2)$  das Moseleysche Gesetz, d.h.  $1/\lambda_K \sim Z^2$  zu bestätigen.

**6. Fragen zur Selbstkontrolle**

- 1) Wie funktioniert eine Röntgenröhre?
- 2) Welche verschiedenen Röntgenspektren unterscheidet man (Zeichnung)?
- 3) Wieso gibt es eine kurzwellige Grenze des Bremspektrums?
- 4) Wie kommt das charakteristische Spektrum zustande?
- 5) Wie lautet das Moseley-Gesetz?
- 6) Wie sieht ein Röntgenspektrum in Absorption aus? Wie kommt es zustande?
- 7) Wie weist man Röntgenstrahlen nach, wie, dass es sich hierbei um elektromagnetische Wellen handelt?
- 8) Wie lautet das Braggsche Gesetz?
- 9) Wie funktioniert ein Zählrohr?
- 10) Leiten Sie die Gleichung (5) für die Korrektur der Bragg-Winkel ab!

## Versuch B11: Elektronenbeugung

**1. Literatur:** Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik  
Bergmann-Schaefer: Experimentelphysik III, Optik  
Schpolski: Atomphysik I

**Stichworte:** Materiewellen, De Broglie-Wellenlänge, Elektronenbeugung  
BraggReflexion, Kristallgitter von Graphit, Netzebenen

### 2. Grundlagen

Treffen Elektronenstrahlen auf Materie, so werden sie infolge der Coulombwechselwirkung am elektrischen Potenzial der Atomhüllen und -kerne gestreut. Sind die Atome in räumlich periodisch geordneten Strukturen wie z.B. Kristallen angeordnet, so zeigt das Experiment, dass die Elektronen bevorzugt in bestimmte Richtungen gestreut werden. Diese Richtungen hängen einerseits von der Struktur des Kristall selbst sowie von der Richtung des Elektronenstrahls bezogen auf die Kristallachsen ab, andererseits aber auch von der kinetischen Energie der Elektronen. Es werden Streumuster beobachtet, welche den *Beugungsbildern* des sichtbaren Lichts an optischen Gittern bzw. denen von Röntgenstrahlen an (eben solchen) Kristallen entsprechen (vergl. Versuche D7: *Beugung am Gitter* sowie B10: *Versuch mit Röntgenstrahlen*). Man nennt diese (elastische) Streuung daher *Elektronenbeugung*. Da die Beugungsbilder des sichtbaren Lichts wie der Röntgenstrahlen auf der *Interferenz von Wellen* beruhen, besitzen offenbar auch Materiestrahlen wie Elektronen selbst *Welleneigenschaften*.

Im vorliegenden Versuch wird das Beugungsbild von Elektronen nach Transmission durch eine dünne polykristalline Graphitfolie ausgemessen. Es werden daraus bestimmte Abstände in der bekannten hexagonalen Kristallstruktur von Graphit bestimmt und mit den Literaturwerten verglichen.

#### 2.1 Wellennatur des Elektrons

Im Jahre 1924 stellte *L. De Broglie* die Hypothese auf, dass der Welle-Teilchen-Dualismus (vergl. Versuch D4: *Photoelektrischer Effekt*) nicht eine Besonderheit der optischen Erscheinungen allein ist, sondern dass auch Masseteilchen Welleneigenschaften zuzuschreiben sind. Dieser von ihm quantitativ formulierte Zusammenhang zwischen den physikalischen Eigenschaften von Masseteilchen und Wellen (s.u.) ist darauf 1927 durch Streuexperimente von *Davission* und *Germer* mit Elektronen an Nickel-Einkristallen in seiner Gültigkeit bestätigt worden.

Einem materiellen Teilchen, z.B. einem Elektron der Masse  $m$ , das sich im feldfreien Raum gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, sind nicht nur im Teilchenbild eine Energie  $E$  und ein Impuls  $p$  zugeordnet sondern auch im Wellenbild eine Frequenz  $\nu$  und eine Wellenlänge  $\lambda$ . Impuls  $p$  und Wellenlänge  $\lambda$  sind nach der *De Broglie-Beziehung* verknüpft:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{h}{mv} \quad (1)$$

Die Konstante  $h$  ist die Plancksche Konstante.

Werden z.B. in einer Elektronenröhre (einem mit Elektroden, Kathode, Anode, etc. versehenen evakuierten Glasbehälter) Elektronen aus der elektrisch beheizten Kathode, d.h. durch thermische Emission, freigesetzt und durch eine zwischen Kathode und Anode angelegte elektrische Spannung  $U$  beschleunigt, besitzen sie nach Durchlaufen des Potenzialgefälles zwischen Kathode und Anode die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = eU \quad (2)$$

Auflösen von Gl. (2) nach  $v$  und Einsetzen in Gl. (1) liefert für die Wellenlänge  $\lambda$  der beschleunigten Elektronen:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{1225}{\sqrt{U/V}} \text{ pm} \quad (3)$$

Für den Zahlenwert von  $\lambda$  als Funktion der Beschleunigungsspannung  $U$  (in V) wurde in Gl. (3) die Ruhmasse des Elektrons eingesetzt. Für große Beschleunigungsspannungen  $U$  liefert eine genauere, relativistische Rechnung die Näherungsformel:

$$\lambda = \frac{1225}{\sqrt{U/V}} (1 - 0,489 \cdot 10^{-6} U/V) \text{ pm} \quad (3a)$$

Die im vorliegenden Versuch benutzte maximale Beschleunigungsspannung beträgt 10 kV. Einsetzen dieser Spannung in Gl. (3) liefert  $\lambda = 12,25 \text{ pm}$ ;

Einsetzen in Gl. (3a) liefert eine lediglich um 0,5 % geringere Wellenlänge  $\lambda = 12,19 \text{ pm}$ . Für die Bestimmung der Wellenlänge der beschleunigten Elektronen kann daher im vorliegenden Versuch die nichtrelativistische Rechnung, Gl. (3), benutzt werden.

## 2.2 Bragginterferenz gebeugter Elektronenstrahlen

Die Beugung der Elektronenwellen durch Materie beruht auf der Streuung der elektrisch geladenen Elektronen am Coulomb-Potenzial seiner Atome. Diese Streuung ist sehr stark, so dass nur vergleichsweise dünne Objekte mit Schichtdicken der Größenordnung  $< \mu\text{m}$  durchstrahlt werden können. Jedes einzelne Elektron eines sich in eine bestimmte Richtung ausbreitenden parallelen monoenergetischen Elektronenstrahlbündels erzeugt ein kohärentes ebenes Wellenfeld mit der durch Gl. (3) festgelegten Wellenlänge.

Die streuende Substanz, welche für einen Kristall aus räumlich periodisch angeordneten Atomen bzw. Atomgruppen besteht, erzeugt an den Orten seiner Streuzentren jeweils Kugelwellen, die sich im Raum überlagern und ein der räumlich periodischen Struktur des Kristalls entsprechendes Interferenzmuster bilden. Für die Beobachtung dieses Musters ist wichtig, dass die Abstände benachbarter Atome von der Größenordnung der Wellenlänge der Elektronenstrahlen sind, also hier etwa 10 bis etwa 200 pm betragen.

Abb. 1 verdeutlicht den für die Interferenz der gestreuten Wellen wichtigen Zusammenhang zwischen dem räumlichen Abstand  $d$  der streuenden Atome und der Phasendifferenz der gestreuten Wellen am einfachen Beispiel eines (primitiven) kubischen Kristallgitters, bei dem sich die Zentren der Atome jeweils an den Eckpunkten zusammengelagerter Würfel der Kantenlänge  $d$  befinden.

Elektronen der Wellenlänge  $\lambda$  treffen unter einem Winkel  $\theta$  auf die von den Würfelflächen gebildeten parallelen *Netzebenen* des Kristalls. Sog. *Braggsche Reflexion* (W.H. und W.L. Bragg), d.h. Intensitätsverstärkung der unter dem Winkel  $\theta$  ausfallenden bzw. um den Winkel  $2\theta$  gestreuten Strahlen erfolgt nur dann, wenn der Gangunterschied der Wellenfronten (Phasen) der von benachbarten Netzebenen gestreuten Elektronen gleich einem ganzzahligen Vielfachen  $n$  der Wellenlänge  $\lambda$  ist. Der Gangunterschied berechnet sich in einfachster Weise aus den geometrischen Verhältnissen entsprechend Abb. 1. Es gilt:

$$n\lambda = 2d\sin\theta_n \quad \text{Braggsche Gleichung} \quad (4)$$

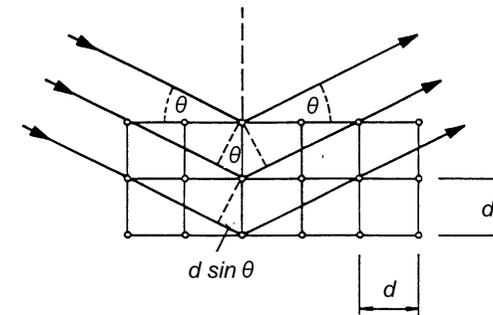


Abb.1: Braggsche Reflexion am Einkristall

Mit Braggscher Reflexion kann also der Netzebenenabstand  $d$  eines unbekanntes Gitters bestimmt werden, wenn die Wellenlänge  $\lambda$  des verwendeten Elektronenstrahls bekannt ist, oder umgekehrt  $\lambda$ , wenn der Netzebenenabstand  $d$  des verwendeten Kristalls bekannt ist.

## 2.3 Bragginterferenz am Graphitgitter

Abb. 2 zeigt das Schema des Kristallgitters von Graphit. Es stellt ein Schichtengitter mit hexagonaler Struktur dar. Innerhalb der (hier) horizontalen

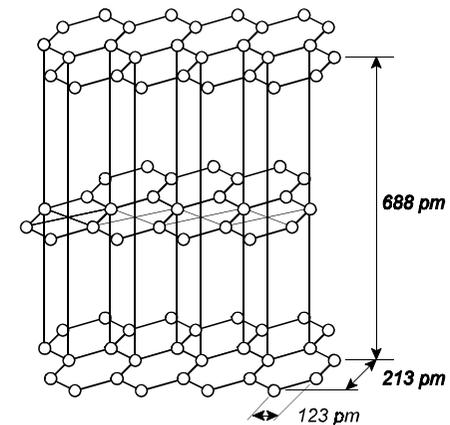


Abb.2: Kristallgitter von Graphit schematisch mit Angabe wesentlicher Netzebenenabstände

Ebenen sind die Abstände der Kohlenstoffatome wesentlich geringer als senkrecht zur jeweils benachbarten Ebene. Mit den im Versuch benutzten Beschleunigungsspannungen (5 - 10 kV) sind für die Elektronenbeugung nur solche Netzebenen wesentlich, deren Normalen parallel zu den horizontalen Ebenen liegen.

Abb. 3 zeigt eine Schichtenebene des Graphitgitters mit den für die Elektronenbeugung wichtigsten Netzebenenabständen, die nachfolgende Tabelle gibt die Abstände  $d_1$  bis  $d_5$  der Netzebenen an.

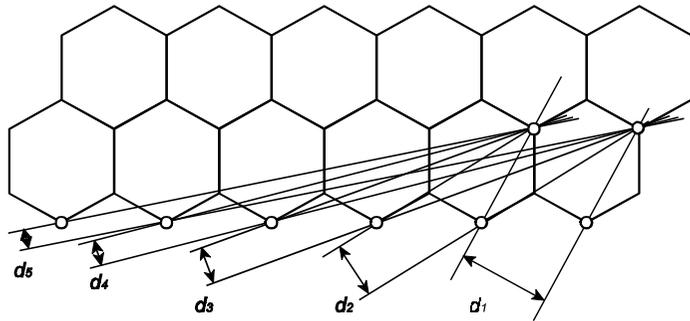


Abb. 3: Netzebenenabstände  $d_1$  -  $d_5$  des Graphitgitters

i	1	2	3	4	5
$d_i$ (pm)	213	123	80,5	59,1	46,5

Tab. 1: Netzebenenabstände des Graphitgitters

Im vorliegenden Versuch besteht die Graphitfolie aus einem Polykristall, bei dem kleine Einkristalle mit regelloser relativer Orientierung zusammengelagert sind. Es sind daher für eine gegebene Beschleunigungsspannung bzw. Wellenlänge der Elektronen nur ein Bruchteil aller Kristallite der Folie so orientiert, dass sie die Bedingung der konstruktiven Interferenz,  $\theta(d,\lambda)$ , Gl. (4), erfüllen. Die von diesen Kristalliten gestreuten Elektronen bilden einen Konus mit Streuwinkel  $2\theta$  um die Einfallsrichtung des Elektronenstrahls. Das auf einem Leuchtschirm sichtbare Interferenzbild der Elektronen besteht daher aus konzentrisch liegenden hellen Ringen, deren Durchmesser vom Abstand Folie - Schirm und vom Streuwinkel  $2\theta$  abhängt (s.u.). Abb. 4 zeigt ein solches Beugungsbild von Elektronen nach Transmission durch polykristallinen Graphit. Deutlich sind hier lediglich zwei helle Ringe zu erkennen.



Abb. 4: Elektronenbeugungsbild von polykristallem Graphit

### 3. Aufgabenstellung

Aus den mit einer Elektronenröhre erzeugten Beugungsbildern von polykristallem Graphit sind für verschiedene Beschleunigungsspannungen der Elektronen die Radien der Beugungsringe und daraus die Netzebenenabstände des Graphitgitters zu bestimmen und mit den Literaturwerten zu vergleichen.

### 4. Versuchsaufbau

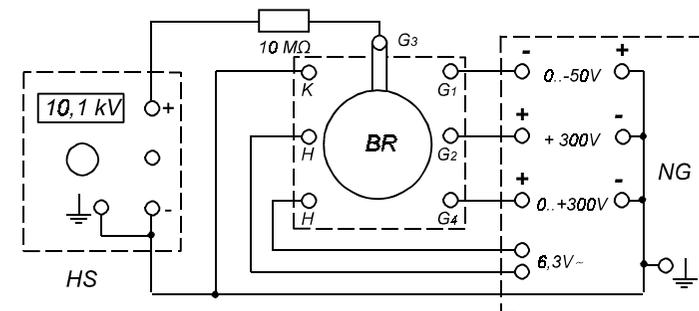
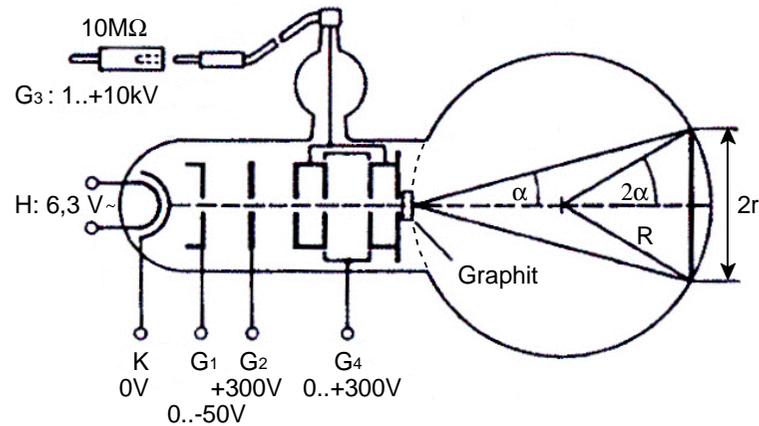


Abb. 5: Schaltschema der elektrischen Anschlüsse der Elektronenbeugungsröhre BR mit Kathode K, Heizung H, Gitterelektroden  $G_1$  -  $G_4$  sowie Hochspannungsquelle HS und Netzgerät NG



**Abb. 6:** Elektronenbeugungsröhre im Längsschnitt mit Anschlüssen Heizung H, Kathode K, Gitter  $G_1 - G_4$

Abb. 5 zeigt die Beschaltung der Elektronenbeugungsröhre, Abb. 6 die Röhre im Längsschnitt. Der aus der Kathode thermisch emittierte Elektronenstrahl wird durch die zwischen Kathode und die Gitter  $G_1, G_2$  und  $G_4$  gelegten Spannungen im wesentlichen gebündelt, durch die zwischen Kathode und Anode ( $G_3$ ) über einen Schutzwiderstand ( $10\text{ M}\Omega$ ) angelegte Hochspannung beschleunigt. Er trifft auf die Graphitfolie, welche so positioniert ist, dass sie an der inneren Oberfläche des kugelförmigen Teils (Durchmesser  $2R = 127 \pm 3\text{ mm}$ ) der Röhre liegt. Die unter dem Winkel  $\alpha = 2\theta$  gebeugten Elektronen treffen auf der der Folie gegenüberliegenden Seite der Glaskugel auf einen Fluoreszenzschirm, wo sie einen hellen Kreisring mit Radius  $r$  bilden. Es gilt:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{r}{R} \quad (5)$$

Für kleine Radien  $r$  ( $r_{\max} \approx 30\text{ mm}$ );  $R = (63,5 \pm 1,5)\text{ mm}$  folgt:  $2\alpha_{\max} = 28^\circ$ ;  $\cos \alpha_{\max} = 0,97 \approx 1$ . (max. 3 % Fehler). Hieraus folgt, dass auch  $\cos \theta_{\max} \approx 1$  (max. 1% Fehler), so dass

$$\frac{r}{R} = \sin 2\alpha \approx 2 \sin \alpha = 2 \sin 2\theta \approx 4 \sin \theta \quad (6)$$

Einsetzen in Gl. (4) ergibt in der Näherung, Gl. (6) den einfachen Zusammenhang zwischen dem Radius  $r$  des Beugungsringes und der Wellenlänge  $\lambda$ :

$$r = \frac{2R}{d} n \lambda \quad (7)$$

Die Auftragung der gemessenen Radien  $r_i$  der Beugungsringe über der von der Beschleunigungsspannung abhängigen Wellenlänge  $\lambda$  ermöglicht es, (für  $n = 1$ ) z.B. aus der Steigung der Ausgleichsgeraden den jeweiligen Netzebenenabstand  $d_i$  zu bestimmen.

### 5. Versuchsdurchführung und Auswertung

Vor Einschalten der Geräte (Hochspannungsquelle HS und Netzgerät NG) ist die Schaltung, Abb.5, zu überprüfen. Es sind zunächst die Einstellungen der Spannungen  $U_{G1}$  auf  $-55\text{ V}$  (Maximum),  $U_{G2}$  auf  $300\text{ V}$  (fest),  $U_{G3}$  (Hochspannung) auf  $0\text{ V}$  (linker Anschlag),  $U_{G4}$  auf ca.  $250\text{ V}$  vorzunehmen. Nach Einschalten der Geräte ist die Hochspannung  $U_{G3}$  von Null aus langsam zu erhöhen. Bei geringen Beschleunigungsspannungen  $U_{G3}$  ist auf dem Bildschirm zunächst das Abbild des Probenhalters mit der Graphitfolie zu sehen.

Bemerkung: Mit modernen hochauflösenden Elektronenmikroskopen (Campus Duisburg / FB Physik) sind mittels magnetischer Linsen heute Abbildungen mikroskopischer Objekte bis hinab in den Bereich subatomarer Abstände ( $< 10^{-10}\text{ m}$ ) möglich.

Bei weiterer Erhöhung der Beschleunigungsspannung erhellt sich der Bildschirm und es wird ein um das Zentrum orientiertes ringförmiges Beugungsbild der Elektronen sichtbar, deren Radien sich mit zunehmender Spannung verkleinern (s. Gl. (3 u. 7)). Stellen Sie die maximale Beschleunigungsspannung  $U_{G3}$  ein.

Variieren Sie nun die Spannung  $U_{G1}$ . Diese Spannung des um die Kathode gelagerten sog. *Wehneltzylinders* (s. Abb.6) beeinflusst stark die Fokussierung und Intensität des aus der Kathode austretenden Elektronenstrahls. Es zeigt sich, dass bei maximaler Spannung  $U_{G1} = \text{ca. } -55\text{ V}$  (Skala) das Beugungsbild zwar keine maximale Intensität aber einen maximalen Kontrast bietet. Benutzen Sie diese Einstellung  $U_{G1}$  für alle nachfolgenden Messungen.

Bestimmen Sie nun mithilfe des auf die Röhrenoberfläche angepassten Lineals die Radien (in mm) der deutlich erkennbaren zwei inneren hellen Beugungsringe sowie der bei maximaler Hochspannung  $U_{G3}$  ebenfalls erkennbaren (schwächeren) zwei äußeren Beugungsringe. Bestimmen Sie bei den Messungen gegebenenfalls die inneren und äußeren Radien der Ringe sowie links und rechts getrennt und daraus nachträglich deren Mittelwerte.

Bestimmen Sie nun die Radien  $r_i$  der erkennbaren Beugungsringe für die Spannungen  $U_{G3}$  zwischen 10 und 6 kV in 1 kV-Intervallen und wiederholen Sie die ganze Messreihe zweimal, wobei die Beobachtung bzw. Registrierung der Messwerte innerhalb der Gruppe auszutauschen ist.

Schätzen Sie in der Auswertung der Messergebnisse den typischen Fehler  $\pm \Delta r$  bei der Bestimmung der Ringradien ab. Tragen Sie die Mittelwerte  $r_i \pm \Delta r$  (Fehlerbalken) über der aus der jeweiligen Beschleunigungsspannung  $U_{G3}$  mit Gl. (3) bestimmten Wellenlänge  $\lambda$  auf. Bestimmen Sie aus der Steigung der entsprechenden Ausgleichsgeraden gem. Gl. (7) für  $n = 1$  den jeweiligen Netzebenenabstand  $d_i$  des Graphitgitters.

Anmerkung: Im vorliegenden Versuch sind lediglich für zwei Beugungsringe die Radien für alle Spannungen  $U_{G3}$  zu ermitteln. Aus den bei hoher Beschleunigungsspannung darüber hinaus beobachtbaren äußeren Beugungsringen können aus den jeweiligen Radien  $r_i$  mit Gl. (7) die Netzebenenabstände direkt bestimmt werden.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Literaturwerten  $d_i$  aus Tabelle 1. Diskutieren Sie mögliche Fehlerquellen für Abweichungen, die deutlich den Fehler infolge der ungenauen Radienbestimmung übersteigen.

## 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie groß ist die Wellenlänge von Elektronen mit kinetischer Energie a) 1keV, b) 10 keV? Von welcher Größenordnung sind die atomaren Abstände in festen Körpern?
- 2) Was ist die Ursache für die Beugung von Elektronen an Kristallen?
- 3) Was versteht man unter einem Einkristall, was unter einem Polykristall?
- 4) Wie lautet die Bedingung für konstruktive Interferenz an Kristallen gebeugter Elektronen (wie auch von Röntgenstrahlen) ?
- 5) Wie lassen sich Elektronen nachweisen bzw. Intensitäten von Elektronenstrahlen bestimmen?
- 6) Wie groß ist der kleinste Abstand der Kohlenstoffatome in Graphit?

## Versuch B 12: Geschwindigkeit von $\alpha$ -Teilchen

**1. Literatur:** Gerthsen/Kneser/Vogel, Physik  
 Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik,  
 Bd. IV,2: Aufbau der Materie  
 SchpolSKI, Atomphysik, Bd. I u. II  
 Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. 2 u. 3

**Stichworte:** Kernumwandlungen, Radioaktivität, Zerfallsgesetze;  
 Stabilität von Atomkernen;  $\alpha$ -Zerfall, Tunneleffekt; Reich-  
 weite, Energie und Geschwindigkeit von  $\alpha$ -Teilchen;  
 geladene Teilchen in elektr. u. magn. Feldern (Wien-Filter);  
 Messung von Magnetfeldern (Hall-Sonde); Nachweis von  
 $\alpha$ -Teilchen, Ionisation durch radioaktive Strahlung, Zählrohr

### 2. Grundlagen

#### 2.1 Der $\alpha$ -Zerfall

Der  $\alpha$ -Zerfall gehört neben dem  $\beta$ -Zerfall zu den wichtigsten spontanen Umwandlungen von Atomkernen. Er lässt sich durch die Reaktionsgleichung



beschreiben. Sie besagt, dass der Atomkern des Elements X mit Z Protonen und N Neutronen, d.h. das Nuklid (die Kernsorte) mit der Massen- oder Nukleonenzahl  $A = Z + N$  in den Atomkern des Elements Y mit  $Z - 2$  Protonen und  $N - 2$  Neutronen (Massenzahl  $A - 4$ ) zerfällt und in ein  $\alpha$ -Teilchen, den aus 2 Protonen und 2 Neutronen bestehenden Atomkern des Elements Helium ( $A = 4$ ). Bei diesem Zerfallsprozess bleibt die elektr. Gesamtladung und die Zahl der Nukleonen erhalten. (Zu den allg. Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls, siehe Versuch B 13).

Energetisch ist der  $\alpha$ -Zerfall nur bei bestimmten instabilen Atomkernen schwerer Atome (Radionukliden) mit Massenzahlen  $A > 210$  möglich bzw. günstig, da in schweren Atomkernen die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon mit steigender Massenzahl abnimmt, d.h. schwere Atomkerne weniger stabil sind als leichtere. Dies liegt vor allem an den langreichweitigen, abstoßenden Coulomb-Kräften zwischen den Protonen, welche in schweren Kernen mit steigender Nukleonenzahl stärker anwachsen als die kurzreichweitigen, anziehenden Kernkräfte. Da zum

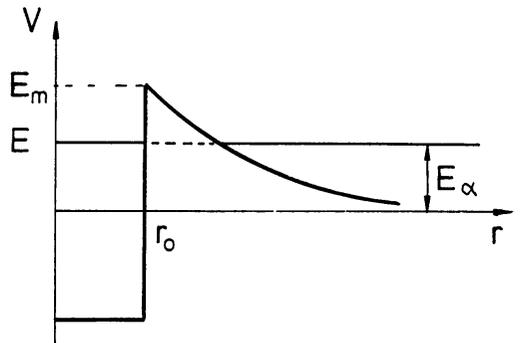
anderen die Protonen und Neutronen im  $\alpha$ -Teilchen aufgrund ihrer gleichen und geraden Anzahl (gg-Kern) selbst eine hohe Bindungsenergie besitzen, zerfallen manche schwere Kerne spontan in leichtere durch Emission von  $\alpha$ -Teilchen, nicht etwa durch Emission einzelner Protonen oder Neutronen.

Der beim  $\alpha$ -Zerfall freiwerdende und für jedes Radionuklid charakteristische Betrag der Bindungsenergie wird zum überwiegenden Teil dem  $\alpha$ -Teilchen in Form von kinetischer Energie übertragen, den (geringen) Rest erhält der Kern als Rückstoßenergie, so dass der Gesamtimpuls erhalten bleibt. Die von einem bestimmten Radionuklid emittierten  $\alpha$ -Teilchen haben also eine einheitliche Energie bzw. Geschwindigkeit. Zerfällt ein Radionuklid X in energetisch angeregte Kernzustände des Nuklids Y, so haben die emittierten  $\alpha$ -Teilchen entsprechend unterschiedliche Energien. Man beobachtet ein Linienspektrum auf der Energie- bzw. Geschwindigkeitsskala. Beim Übergang des energetisch angeregten Kernzustands des Nuklids Y in den Grundzustand wird die Überschussenergie in Form von  $\gamma$ -Quanten (energiereichen Photonen) frei, man beobachtet neben dem  $\alpha$ -Spektrum ein charakteristisches  $\gamma$ -Spektrum. Ähnlich wie die optischen Spektren der Atomhülle die Identifizierung eines Stoffes erlauben (s. Versuch D 5, Spektralanalyse), ermöglicht das Ausmessen der Kernspektren die Identifizierung eines Radionuklids.

Im Rahmen der klassischen Physik ist der  $\alpha$ -Zerfall nicht erklärbar: Einerseits beträgt die charakteristische kinetische Energie der  $\alpha$ -Teilchen bei den natürlichen Radionukliden etwa 2 - 8 MeV, die Geschwindigkeit entsprechend ca.  $1 - 2 \times 10^7$  m/s. Andererseits haben Streuversuche mit  $\alpha$ -Teilchen an Atomkernen (Rutherford u.a.) ergeben, dass erst bei Energien von mehr als 20 MeV die  $\alpha$ -Teilchen die abstoßenden Coulomb-Kräfte (den sog. *Coulombwall*) überwinden und in den Wirkungsbereich der Kernkräfte gelangen können. Demnach müssten die beim  $\alpha$ -Zerfall emittierten He-Kerne mindestens diese Energie besitzen. Erst mit der Entwicklung der Quantenmechanik konnte dieser Widerspruch beim  $\alpha$ -Zerfall gedeutet werden.

Abb. 1 zeigt den Potenzialverlauf des Atomkerns Y für das  $\alpha$ -Teilchen der Energie E als Funktion des Abstandes vom Kernzentrum. Im Bereich  $r < r_0 \approx 10^{-14}$  m (= Kernradius) überwiegen die anziehenden Kernkräfte, das Potenzial ist bindend, also negativ (Potenzialtopf). Für größere Abstände überwiegt die abstoßende Coulomb-Kraft, das (positive) Coulomb-Potenzial hat einen Verlauf  $\sim 1/r$ . Das  $\alpha$ -Teilchen kann klassisch den Potenzialwall der Höhe  $E_m = 2Ze^2/4\pi\epsilon_0 r_0$  ohne Energiezufuhr nicht überwinden, quantenmechanisch hat es jedoch die Eigenschaften einer Materiewelle, welche mit endlicher Wahrscheinlichkeit den Potenzialwall *durchtunneln* kann. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Tunnelprozess hängt sehr stark (exponentiell) von der Höhe und Breite des

Potenzialwalls oberhalb des Energieniveaus  $E$  ab. Dies erklärt auch die sehr unterschiedlichen Zerfallswahrscheinlichkeiten bzw. Halbwertszeiten für den  $\alpha$ -Zerfall verschiedener Radionuklide (s.auch Versuch B 13).



**Abb.1:** Potenzialverlauf des Atomkerns für ein  $\alpha$ -Teilchen der Energie  $E$  als Funktion des Kernabstands;  $E_\alpha$  = kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens für  $r \gg r_0$ ,  $r_0$  = Kernradius

Trotz ihrer hohen Geschwindigkeiten haben die  $\alpha$ -Teilchen nur eine geringe Reichweite in Materie, da sie ein hohes Ionisierungsvermögen besitzen (s. Versuch B 13). So reicht z.B. ein Blatt Papier zur vollständigen Abschirmung von  $\alpha$ -Strahlen aus. In Luft beträgt die Reichweite  $R$  der  $\alpha$ -Teilchen nur einige cm. Sie ist von der Anfangsgeschwindigkeit  $v$  bzw. der Energie der  $\alpha$ -Teilchen abhängig ( $R$  etwa  $\sim v^3$ , Geigersche Regel).

### 2.2 $\alpha$ -Teilchen in elektr. u. magn. Feldern

Die beim  $\alpha$ -Zerfall emittierten  $\alpha$ -Teilchen bewegen sich im Vakuum oder in Gasen beim Fehlen äußerer Felder auf geraden Bahnen, da sie auf einzelne Gasatome jeweils nur einen geringen Teil ihrer kinetischen Energie übertragen. Dies kann z.B. in einer Wilson-Kammer (was ist das?) beobachtet werden.

Durchquert das  $\alpha$ -Teilchen mit der elektr. Ladung  $q = 2e$  und der Geschwindigkeit  $\underline{v}$  ein äußeres elektrisches Feld  $\underline{E}$ , so wirkt auf es die Kraft

$$\underline{F}_C = q\underline{E} = 2e\underline{E} \quad (2)$$

und in einem äußeren Magnetfeld  $\underline{B}$  die sog. *Lorentzkraft*:

$$\underline{F}_L = q\underline{v} \times \underline{B} = 2e\underline{v} \times \underline{B} \quad (3)$$

Diese Kräfte heben sich gerade dann auf, wenn die Feldvektoren  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  senkrecht zueinander und senkrecht zum Vektor der Geschwindigkeit  $\underline{v}$  stehen und (evtl. bis auf das Vorzeichen)

$$F_C = F_L \quad \text{bzw.} \quad E = vB \quad (4)$$

Ist das elektrische Feld das eines Plattenkondensators, zwischen dessen Platten im Abstand  $d$  die Spannung  $U$  besteht, so folgt aus Gl. (4) für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{U}{dB} \quad (5)$$

Es kann also aus der Kenntnis der Größen  $U$ ,  $d$  und  $B$  die Geschwindigkeit der  $\alpha$ -Teilchen bestimmt werden, welche sich geradlinig in diesen Feldern bewegen. Einen Apparat mit gekreuzten  $E$ - und  $B$ -Feldern, welcher nur für geladene Teilchen mit der entsprechenden Geschwindigkeit durchlässig ist, nennt man *Wien-Filter*. Er wird im vorliegenden Versuch zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung der  $\alpha$ -Teilchen benutzt, die beim  $\alpha$ -Zerfall des Radionuklids  ${}_{95}^{241}\text{Am}$  entstehen.

### 2.3 Nachweis von $\alpha$ -Teilchen, Zählrohr

Ein Zählrohr besteht im wesentlichen aus zwei Elektroden, einem zumeist zylindrischem Rohr und einem in der Achse des Rohres gespannten Draht (s. Abb. 2a). Es ist mit einem Edelgas (z.B. Argon) und zumeist mit einem Zusatz (z.B. Halogengas) gefüllt. Ein geladenes Teilchen, das durch ein dünnes Fenster (z.B. aus Glimmer oder Kunststoff wie Mylar) in das Zählrohr gelangt, erzeugt durch die Ionisation der Atome des Füllgases freie Elektronen, deren Gesamtladung seiner abgegebenen Energie proportional ist. In einem angelegten elektrischen Feld (Spannung zwischen Draht und Zylinderrohr) wandern die Elektronen auf den Draht zu, die positiven Ionen zur Rohrwand.

Für kleine elektr. Feldstärken bzw. Spannungen ist der resultierende Strompuls gleich der von dem Teilchen im Rohr erzeugten Ladungsmenge der Ionenpaare; das Rohr arbeitet als *Ionisationskammer* (s. Abb. 2b und Vers. B 13). Der Strompuls kann als Spannungspuls an einem äußeren Widerstand im Stromkreis registriert werden. Bei höheren Spannungen können die im Feld beschleunigten Elektronen auf dem Weg zwischen Stößen mit den Gasatomen soviel Energie

aufnehmen, dass sie diese ebenfalls ionisieren und damit weitere Elektronen und Ionen erzeugen. Die sich nur langsam zur Rohrwand bewegenden positiven Ionen

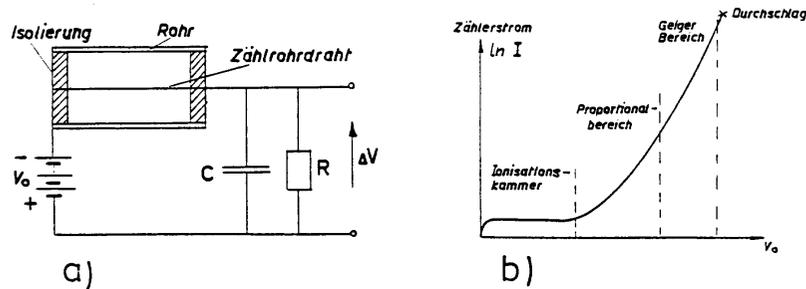


Abb.2: Zählrohr: a) Schaltschema, b) Kennlinie

bilden jedoch eine Raumladung, welche das elektrische Feld im Rohr reduziert und bei nicht zu hoher Zählrohrspannung ein weiteres Anwachsen der Ladungslawine verhindert. Die insgesamt freigesetzte Ladungsmenge bzw. der Zählerstrompuls ist um einen spannungsabhängigen Verstärkungsfaktor  $A$  größer als bei der Ionisationskammer und proportional zur primär erzeugten Ladungsmenge bzw. Energie des Teilchens; das Rohr arbeitet im *Proportionalbereich*.

Bei den inelastischen Stößen der Elektronen mit den Gasatomen werden ebenfalls Photonen emittiert, die in anderen Raumbereichen des Zählrohrs ihrerseits Ionisationen auslösen können. Die auf diese Weise erzeugte Vielfach-Lawinenbildung wird mit steigender Zählrohrspannung erst bei einem Verstärkungsfaktor  $A$  von etwa  $10^5$  wirksam. Der Zählerstrompuls ist dann unabhängig von der primär erzeugten Ladungsmenge, das Zählrohr arbeitet als *Geiger-Zähler*. Die Spannung, bei der ein Geiger-Zählrohr am zweckmäßigsten zu betreiben ist, ergibt sich aus der *relativen Zählrate* (Pulsrate) als Funktion der Zählrohrspannung. Sie ist in einem Intervall von einigen 100 V nahezu konstant (Geiger-Plateau).

Das dem Edelgas zugesetzte Gas des Zählrohrs hat die Eigenschaft, sowohl die aus der Ladungslawine emittierten Photonen zu absorbieren als auch auf Grund seiner geringeren Ionisierungsenergie die Ladung der Edelgasionen zu übernehmen. Diese wie auch die Photonen können dadurch nicht zur Zählrohrwand gelangen und dort Sekundärelektronen erzeugen. Auf diese Weise wird ein weiteres Ansteigen der Ladungslawine und eine Dauerentladung des Zählrohrs (Durchschlag) verhindert (sog. Quenching).

### 3. Versuchsaufbau

Den Versuchsaufbau zur Bestimmung der Geschwindigkeit der  $\alpha$ -Teilchen zeigt Abb. 3 schematisch:

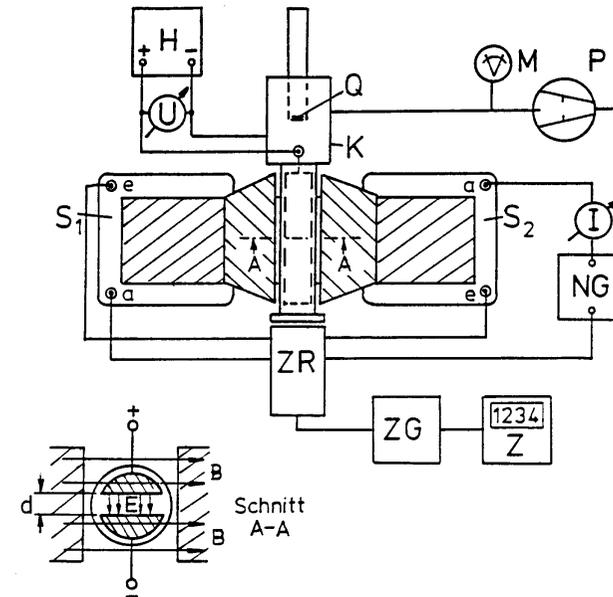


Abb.3: Versuchsaufbau

Das radioaktive Präparat  $Q$  ( $Am^{241}$ ) befindet sich mit einer sehr dünnen Goldfolie abgedeckt an der Spitze eines Metallstabes, der in das eine seitliche Ende einer evakuierbaren zylindrischen Ablenkammer  $K$  gesteckt ist. Von den  $\alpha$ -Teilchen, die diese Kammer durchqueren, gelangen nur jene, deren Bahnen axial verlaufen und durch äußere Felder unbeeinflusst bleiben, zum anderen, durch eine dünne Glimmerfolie abgedeckten Ende der Kammer. Sie werden dort vom Zählrohr  $ZR$  registriert und dessen Impulse mit Hilfe des Zählgerätes  $ZG$  vom Zähler  $Z$  gezählt. Der lange zylindrische Teil der Kammer enthält zur Erzeugung eines in vertikale Richtung zeigenden elektrischen Feldes zwei lange, im Abstand  $d$  übereinanderliegende Kondensatorplatten (s. Schnitt A-A). Die Spannung  $U$  der Platten liefert das Hochspannungsgerät  $H$ . Zur Erzeugung des horizontalen, quer zur Kammer liegenden Magnetfeldes dienen zwei Spulen  $S_1, S_2$  auf einem Eisenjoch, zwischen dessen Polschuhen sich die Kammer mit den

Kondensatorplatten befindet. Den Spulenstrom  $I$  liefert ein Gleichspannungsnetzgerät NG. Zur Bestimmung des Magnetfeldes als Funktion des Spulenstroms dient eine Hallsonde, zur Herstellung des notwendigen Vakuums in der Kammer eine Drehschieberpumpe (P), zur Druckmessung ein *Pirani*-Wärmeleitungsmanometer (M).

#### 4. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie mit einer Hallsonde die magn. Induktion  $B$  zwischen den Polschuhen des Elektromagneten als Funktion des Spulenstroms  $I$ .
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Zählrate für die  $\alpha$ -Teilchen als Funktion des Magnetfeldes bei konstantem elektr. Feld und berechnen Sie aus den Feldstärken für die max. Zählrate die Geschwindigkeit der registrierten  $\alpha$ -Teilchen.

#### 5. Versuchsdurchführung und Auswertung

##### 5.1 Magnetfeldmessung

Zur Bestimmung der magn. Induktion zwischen den Polschuhen werden diese im Abstand von 11 mm auf dem U-Kern justiert. Zur Entmagnetisierung des Kerns werden die Spulen zunächst entgegengesetzt geschaltet und kurzzeitig mit einem Strom von 2,5 A erregt. Danach wird die Hallsonde in die Mitte zwischen die Polschuhe gebracht, der Strom  $I$  durch die in Reihe geschalteten Spulen von 0 bis 2,5 A in Schritten von 0,5 A erhöht und die jeweilige magn. Induktion  $B$  bestimmt. Wiederholen Sie diesen Versuchsteil einschließlich der Entmagnetisierung, bestimmen Sie den jeweiligen Mittelwert  $B(I)$  und stellen Sie diesen graphisch dar (Eichkurve). Da die Polschuhe und der U-Kern des Magneten eine Remanenz aufweisen, darf der Spulenstrom zur Bestimmung von  $B$  (bei  $I = 0$  beginnend) nur in einer Richtung verändert werden. Ebenso ist vor jeder der folgenden Messreihen der Magnet zu entmagnetisieren.

##### 5.2 Bestimmung der Geschwindigkeit der $\alpha$ -Teilchen

Die Ablenkammer wird *vorsichtig* mittig zwischen den Polschuhen so justiert, dass das Magnetfeld genau senkrecht zum elektrischen Feld steht. Darauf wird der Probenhalter mit dem radioaktiven Präparat *vom studentischen Betreuer* in die Kammer eingeführt und diese bis auf einen Druck von ca.  $10^{-2}$  mbar evakuiert, bevor die Hochspannung an die Kondensatorplatten gelegt werden darf (Gefahr

des Durchschlags und der Zerstörung der Kammer). Die Pumpe bleibt während der gesamten Versuchsdauer eingeschaltet. Nach Entfernen der Schutzkappen von Kammer und Zählrohr wird das Zählrohr *vorsichtig* montiert (Bruchgefahr!). Auf keinen Fall dürfen die empfindlichen Folien von Zählrohr und Kammer berührt werden!

Darauf wird im Zeitintervall von 10 s die Anzahl  $N_0$  der  $\alpha$ -Teilchen bestimmt, welche die *feldfreie* Kammer durchlaufen und in das Zählrohr gelangen. Ein von der ebenfalls emittierten  $\gamma$ -Strahlung herrührender Anteil der Zählrate wird dabei ignoriert, da er durch die Felder unbeeinflusst bleibt und nur diese in die Bestimmung der Geschwindigkeit der  $\alpha$ -Teilchen eingehen. Für diese und alle folgenden Zählratenbestimmungen werden bei jeder Feldeinstellung jeweils 15 Messungen durchgeführt, das größte und kleinste Messergebnis jeweils gestrichen und von den restlichen 13 der Mittelwert  $N$  ermittelt.

Stellen Sie für die Messungen in den Feldern nach Anschluss der Spannungsquelle die Kondensatorspannung auf 2 kV ein und bestimmen Sie für das gleiche Zeitintervall von 10 s die Anzahl  $N$  der Teilchen, die bei verschiedenen Feldern  $B$  vom Zählrohr registriert werden. Der Spulenstrom ist hierbei von 0 beginnend jeweils in 0,5 A - Schritten bis auf 2,5 A zu erhöhen. Nach erneutem Entmagnetisieren wird die Zählrate nochmals im Bereich der Felder des beobachteten Maximums  $N_{\max}$  für verschiedene Spulenströme in Stufen von jeweils 0,25 A ermittelt. Die Zählrate  $N_{\max}$  sollte ungefähr der Zählrate  $N_0$  entsprechen.

Nach den Messungen sind die Hochspannung, der Spulenstrom und die Pumpe abzuschalten, die Kammer *vorsichtig* zu belüften, das Präparat *vom studentischen Betreuer* zu entfernen und die Schutzkappen von Kammer und Zählrohr anzubringen.

In der Auswertung ist  $N(B)$  graphisch darzustellen und aus der Lage  $B_{\max}$  des Maximums,  $N_{\max} = N(B_{\max})$ , mit Gl.(5) die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v$  der registrierten  $\alpha$ -Teilchen zu bestimmen. Der Abstand  $d$  der Kondensatorplatten beträgt 0,9 mm.

Diskutieren Sie das Messergebnis! Warum hat die Zählrate  $N(B)$  kein scharfes Maximum bei einem bestimmten Feld? Was lässt sich daraus für die Geschwindigkeit der  $\alpha$ -Teilchen schließen? Vergleichen Sie die ermittelte Geschwindigkeit mit dem Tabellenwert und diskutieren Sie mögliche Abweichungen!

$$\text{AM 241: } \alpha: v_{\text{tab}} = (1,62 + 0,01 - 0,03) \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$$

### 5.3 Fehlerrechnung

Bestimmen Sie die Standardabweichung für die jeweils benutzten Messwerte einer Zählrate und tragen Sie diese als Fehlerbalken in das Diagramm  $N(B)$  ein. Schätzen Sie hieraus den Fehler für die Lage  $B_{\max}$  sowie für die Geschwindigkeit  $v$  ab.

Berechnen Sie nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz den Fehler von  $v$  bei max. Fehlern  $\Delta U$  (s. Messgeräteangabe),  $\Delta d = \pm 0,05$  mm,  $\Delta B = \pm 5$  mT.

### 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche verschiedene *Zerfallsarten* gibt es?
- 2) Wie lautet die Reaktionsgleichung für den  $\alpha$ -Zerfall des benutzten Präparats?
- 3) Wie groß ist die kinetische Energie  $E_\alpha$  der von Am 241 emittierten  $\alpha$ -Teilchen, wie groß ihre Ruhenergie? Muss man zur Berechnung von  $E_\alpha$  aus  $v$  bzw. umgekehrt relativistisch rechnen?
- 4) Wie kann man den  $\alpha$ -Zerfall quantenmechanisch erklären?
- 5) Welche Kräfte üben elektr. und magn. Felder auf geladene Teilchen aus?
- 6) Was ist ein *Wien-Filter*? Wie kann man durch Kombination von elektr. und magn. Feldern auch die Masse geladener Teilchen bestimmen?
- 7) Wie funktioniert ein *Zählrohr*?
- 8) Wie unterscheiden sich die Geschwindigkeitsspektren von  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlen und warum?
- 9) Wie lautet allgemein das Gesetz für den radioaktiven Zerfall?

## Versuch B 13: Radioaktiver Zerfall

- 1. Literatur:** Walcher, Praktikum der Physik  
 Gerthsen/Kneser/Vogel, Physik  
 Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. IV,2: Aufbau der Materie  
 SchpolSKI, Atomphysik, Bd. I u. II  
 Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. 2 u. 3

**Stichworte:** Kernübergänge und -umwandlungen, Radioaktivität, Zerfallstypen ( $\alpha$ -,  $\beta$ -Zerfall), Zerfallsreihen, Aktivität, Zerfallsgesetz, Zerfallskonstante, Halbwertszeit, Ionisation durch radioaktive Strahlung, Geiger-Müller-Zählrohr

## 2. Grundlagen

### 2.1 Angeregte Atomkerne

Wie die Elektronen in einem Atom, kann auch ein Atomkern mit seinen Bausteinen, den Nukleonen (Protonen u. Neutronen), sich in verschiedenen Energiezuständen mit bestimmten, für den Kern charakteristischen Energien befinden. Die Anregungsniveaus eines Atomkerns liegen also wie die der Atomhülle um diskrete Energiewerte oberhalb des niedrigsten Energieniveaus, das dem Grundzustand entspricht. Im Gegensatz zu den Elektronen der Atomhülle, deren Niveaus sich um Energien der Größenordnung eV bis keV unterscheiden, sind die Energieabstände der Niveaus eines Atomkerns von der Größenordnung MeV. Die Anregung eines Atomkerns ist mit der Aufnahme einer entsprechenden Energie verbunden. Nach einer i.a. sehr kurzen Zeit von etwa  $10^{-14}$  s bis  $10^{-12}$  s kehrt der angeregte Kern spontan unter Emission eines  $\gamma$ -Quants oder mehrerer  $\gamma$ -Quanten<sup>1)</sup> in den Grundzustand zurück. Man beobachtet ein für den Kern charakteristisches Linienspektrum.

### 2.2 Spontane Kernumwandlungen

Bei einer Kernumwandlung geht der Atomkern eines Nuklids (Atomart mit bestimmter Massenzahl A, d.h. Protonenzahl Z + Neutronenzahl N) in den Atomkern eines anderen Nuklids oder in mehrere Atomkerne verschiedener Nuklide über. Die Umwandlung kann spontan oder erzwungen (z.B. durch

1)  $\gamma$ -Quanten sind die Strahlungsquanten (Photonen) der bei Kernübergängen absorbierten bzw. emittierten kurzwelligigen elektromagnetischen Strahlung.

Teilchenbeschuss) erfolgen. Die spontane Kernumwandlung ist i.a. mit der Emission eines energiereichen ionisierenden Teilchens verbunden. Die wichtigsten spontanen Kernumwandlungen sind der  $\alpha$ - und der  $\beta$ -Zerfall: Beim  $\alpha$ -Zerfall wird ein  $\alpha$ -Teilchen (He-Atomkern) emittiert, beim  $\beta^+$ -Zerfall ein  $\beta^+$ -Teilchen (Positron bzw. Elektron) zusammen mit einem Neutrino  $\nu_e$  bzw. Antineutrino  $\bar{\nu}_e$ . Befindet sich der bei der Umwandlung entstehende Atomkern nicht im Grundzustand, kann der Energieüberschuss zusätzlich in Form von  $\gamma$ -Strahlung abgegeben werden. Man spricht bei einer spontanen Kernumwandlung wegen der ionisierenden Wirkung der Teilchen auch von einer radioaktiven Kernumwandlung bzw. von einem radioaktiven Zerfall. Die verschiedenen Zerfallstypen zeigt Abb. 1 in einem Energieschema. Beispiele für Übergänge in angeregte Kernzustände zeigt Abb. 2.

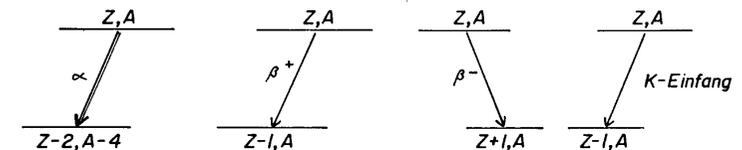
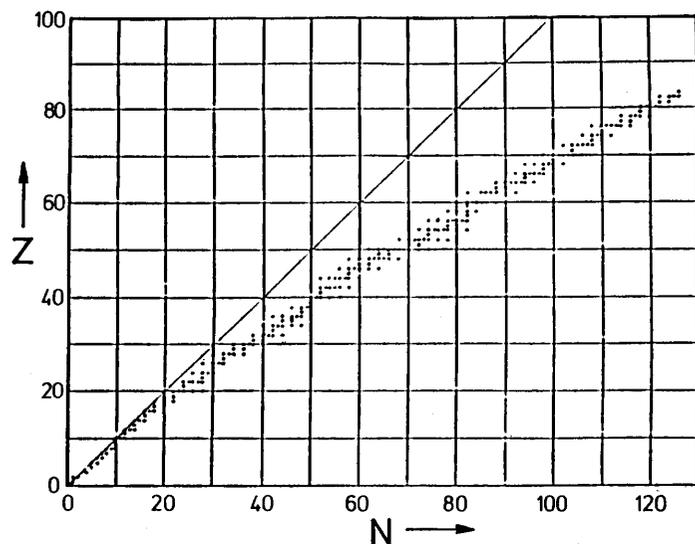


Abb.1: Spontane Kernumwandlungen, schematisch



Abb.2: links:  $\alpha$ -Zerfall von  $^{238}\text{U}$  mit  $\alpha_1$  in den  $^{234}\text{Th}$ -Grundzustand, mit  $\alpha_2$  in den  $^{234}\text{Th}$ -Anregungszustand und  $\gamma$ -Übergang in den Grundzustand; rechts:  $\beta$ -Zerfall von  $^{137}\text{Cs}$  mit  $\beta_1$  in den  $^{137}\text{Ba}$ -Grundzustand, mit  $\beta_2$  in metastabiles  $^{137\text{m}}\text{Ba}$  und  $\gamma$ -Übergang in den Grundzustand

Die Ursache für den radioaktiven Zerfall liegt in der Instabilität bzw. Metastabilität vieler Atomkerne. Von den bis heute über 2000 bekannten Nukliden sind nur 265 stabil. Die stabilen Nuklide liegen in einem eng begrenzten Bereich der N-Z-Ebene (s. Abb. 3). Trägt man die Energie bzw. Masse ( $E = m c^2$ ) aller Nuklide über der N-Z-Ebene auf, so liegen die stabilen Atomkerne in einem Stabilitätstal. Die instabilen Nuklide (Radionuklide), zu denen auch die in der

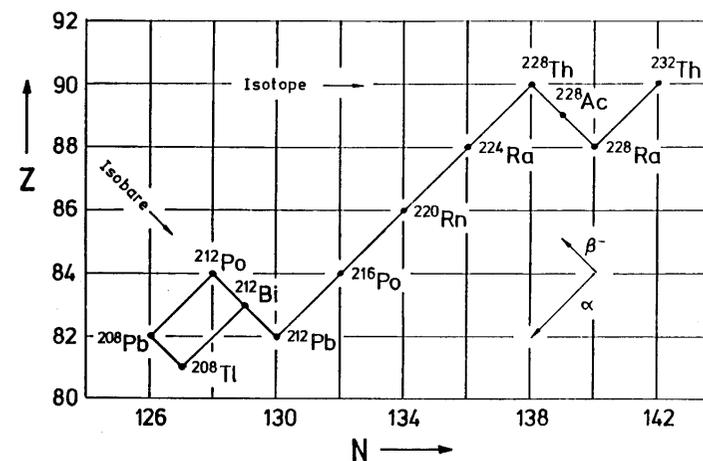


**Abb.3:** Stabilitätsbereich der Nuklide (Punkte) in der N-Z-Ebene; (----):  $N = Z$  - Gerade

Erdkruste bzw. Erdatmosphäre vorkommenden natürlichen Radionuklide gehören, zerfallen nach einer mittleren Lebensdauer  $\tau$  (s.u.). Diese ist für jede Nuklidsorte spezifisch und reicht von etwa  $10^{-7}$  s bis  $10^{11}$  a. Die Zeit für spontane Kernumwandlungen ist also wesentlich größer als für Übergänge angeregter Atomkerne.

Oft sind die bei einem radioaktiven Zerfall entstehenden Nuklide selbst nicht stabil, so dass diese wiederum zerfallen. Es kann somit eine aus mehreren Radionukliden bestehende *Zerfallsreihe* existieren, deren Ende immer ein stabiles Nuklid bildet. Abb.4 zeigt eine der drei bekannten radioaktiven Familien, der Zerfallsreihen natürlicher radioaktiver Nuklide. Sie beginnt bei dem langlebigen Isotop<sup>2)</sup>  $^{232}\text{Th}$  des Elements Thorium (*Mutternuklid*), das sich unter  $\alpha$ -Zerfall mit einer Halbwertszeit (s.u.) von  $T_{1/2} = 1,4 \times 10^{10}$  a in  $^{228}\text{Ra}$  umwandelt. Die Halbwertszeiten der nachfolgend durch  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfall gebildeten *Tochter-nuklide* sind alle wesentlich geringer. Die Reihe endet schließlich beim stabilen Isotop  $^{208}\text{Pb}$ .

2) Isotope = Nuklide mit gleicher Protonenzahl Z;  
Isobare = Nuklide mit gleicher Massenzahl A (s. Abb. 4)



**Abb.4:** Zerfallsreihe des  $^{232}\text{Th}$

Die in Abb. 2 gezeigten Kernumwandlungen können auch als "Zerfallsreihen" mit lediglich einem instabilen Tochternuklid aufgefasst werden. Das rechts in der Abb. 2 gezeigte Isotop  $^{137}\text{Cs}$  wird im vorliegenden Versuch verwendet. Es zerfällt mit der Halbwertszeit (s.u.) von ca. 30 Jahren zu 94% unter  $\beta^-$ -Emission in das metastabile Isotop  $^{137m}\text{Ba}$ , welches nach einer Halbwertszeit von 153 s unter  $\gamma$ -Emission in den Grundzustand übergeht.

### 2.3 Zerfallsgesetz, Aktivität

Man beobachtet, dass der radioaktive Zerfall einen rein statistischen Charakter hat. Dies bedeutet, dass der Zeitpunkt des Zerfalls eines bestimmten Atomkerns einer radioaktiven Substanz nicht voraussagbar ist. Lediglich die Zerfallswahrscheinlichkeit für ein vorgegebenes Zeitintervall ist bestimmbar. Diese beschreibt nur die Zerfallsrate einer großen Anzahl von Atomkernen hinreichend genau.

Besteht eine radioaktive Substanz aus  $N$  ( $\gg 1$ ) Atomkernen der gleichen Nuklidsorte mit der Zerfallswahrscheinlichkeit oder *Zerfallskonstanten*  $\lambda$ , so zerfallen pro Zeiteinheit  $A = N \lambda$  Atomkerne. Die Größe  $A$  nennt man *Aktivität*. (Einheit: *Becquerel*;  $1 \text{ Bq} = 1 \text{ Umwandlung/s}^3$ ). Kommen zu der radioaktiven Substanz keine neuen Kerne hinzu, ist die Aktivität  $A$  numerisch gleich der Rate  $dN/dt$ :

3) Die frühere, heute nicht mehr benutzte Einheit für die Aktivität ist das *Curie*;  
 $1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}$ .

$$A = N\lambda = -\frac{dN}{dt} \quad (1)$$

Integration von Gl. (1) ergibt mit der Anfangsbedingung  $N(t=0) = N_0$  bzw. mit  $A_0 = N_0 \lambda$ :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{bzw.} \quad A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Da mit Gl. (1)  $dN = N \lambda dt$  Atomkerne im Zeitintervall zwischen  $t$  und  $t + dt$  zerfallen, d.h. ihre Lebensdauer gerade  $t$  ist, ergibt sich mit Gl. (2) für die *mittlere Lebensdauer*  $\tau$  eines Radionuklids:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{N_0} t dN = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (3)$$

Üblicher ist die Angabe der *Halbwertszeit*  $T_{1/2}$  eines Radionuklids.  $T_{1/2}$  ist gleich dem Zeitintervall, in dem die Zahl  $N$  jeweils auf die Hälfte des Anfangswertes abnimmt:

$$\frac{N(t + T_{1/2})}{N(t)} = \frac{e^{-\lambda(t + T_{1/2})}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Die Zerfallskonstante oder Halbwertszeit einer radioaktiven Substanz kann mit Gl.(2) ( $A \sim N$ ) über die Aktivitätsabnahme bestimmt werden. Im vorliegenden Versuch wird diese über die zeitliche Abnahme der Zahl von  $\gamma$ -Quanten ermittelt, welche von einer bestimmten Ausgangsmenge des metastabilen  $^{137m}\text{Ba}$  emittiert werden.

Bei einer radioaktiven Substanz mit verschiedenen Nukliden, die gleichzeitig innerhalb einer Zerfallsreihe vorliegen, muss beachtet werden, dass die Aktivitäten

der Tochternuklide nicht unabhängig voneinander sind. Zerfällt z.B. Nuklid 1 mit der Konstanten  $\lambda_1$  in Nuklid 2, welches mit der Konstanten  $\lambda_2$  weiter zerfällt bzw. sich umwandelt, gilt

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_1 \lambda_1; \quad \frac{dN_2}{dt} = N_1 \lambda_1 - N_2 \lambda_2; \quad A_1 = N_1 \lambda_1 \quad (5)$$

Die Lösung der Dgln. (5) führt mit der Anfangsbedingung  $N_2(0) = 0$  zu

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \quad (6)$$

Ist die Halbwertszeit des Mutternuklids wie im vorliegenden Versuch wesentlich größer als die des Tochternuklids ( $\lambda_2 \gg \lambda_1$ ), kann  $\lambda_1$  in Gl. (6) vernachlässigt werden und man erhält:

$$A_2(t) = A_1(0) \left( 1 - e^{-\lambda_2 t} \right) \quad (7)$$

Nach der Zeit  $t \gg 1/\lambda_2$  ist:

$$A_2(t) = A_1(0) = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1 \quad (8)$$

Dieser (für  $t \ll 1/\lambda_1$  stationäre) Zustand wird *radioaktives Gleichgewicht* genannt.

## 2.4 Ionisierung durch radioaktive Strahlung

Treffen die elektrisch geladenen  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Teilchen auf Materie, z.B. die Moleküle eines Gases, treten sie u.a. mit den Atomelektronen durch ineleastische Stöße bzw. Streuung in Wechselwirkung, welche zur Anregung oder Ionisation des Gases führen kann. Auch  $\gamma$ -Quanten können infolge ihres elektromagnetischen Feldes Atome oder Moleküle ionisieren, wobei sie entweder inelastisch gestreut (Compton-Effekt) oder absorbiert werden (Photoeffekt u. Paarbildung). Die Ionisation von Gasen durch  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen bzw. der Photoeffekt durch  $\gamma$ -Strahlen bildet die Grundlage der meisten Kernstrahlungsmessverfahren (Ionisationskammer, Proportional- u. Geiger-Müller-Zählrohr, Nebel-, Blasen- u. Funkenkammer).

## 2.5 Geiger-Müller-Zählrohr

Die Funktionsweise eines Geiger-Müller-Zählrohrs zum Nachweis ionisierender Strahlung beschreibt Abb. 5 schematisch:

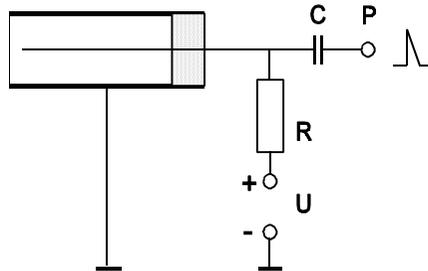


Abb. 5: Geiger-Müller-Zählrohr

Das Zählrohr besteht aus einem zylinderförmigen Metallgehäuse, das an einer Seite durch eine dünne, für  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen durchlässige Folie abgeschlossen ist. Durch das andere geschlossene Ende des Rohrs ragt axial ein dünner Metalldraht, der vom Gehäuse isoliert über einen Widerstand  $R$  ( $> 1 \text{ M}\Omega$ ) mit dem Pluspol einer Spannungsquelle  $U$  (ca. 500 V) verbunden ist. Deren Minuspol ist mit dem (geerdeten) Gehäuse verbunden. Das Zählrohr ist mit Inertgas (z.B. Argon ca. 100 mbar) und einem Zusatz von Alkoholdampf (ca. 10 mbar) gefüllt. Tritt radioaktive Strahlung ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) in das Rohr, werden einzelne Gasatome ionisiert, die Elektronen werden zum positiv geladenen Draht in Richtung der Rohrachse, die positiven Ionen zum Gehäuse hin beschleunigt. Die  $\gamma$ -Quanten setzen dagegen vorwiegend aus der Gehäusewand Elektronen frei (Photoeffekt).

Aufgrund der zur Rohrachse ansteigenden elektrischen Feldstärke werden die freigesetzten Elektronen so stark beschleunigt, dass sie auf dem Weg zum Draht weitere Gasatome ionisieren. Es kommt zu einer Entladung des gesamten Rohrs, die jedoch zeitlich durch den Alkoholzusatz begrenzt wird. Der Entladungsstrom erzeugt im Widerstand  $R$  einen Spannungspuls, der über den Kondensator  $C$  am Punkt  $P$  als Zählpuls registriert wird.

Die Zählrate des Rohrs ist über einen weiten Bereich der Spannung  $U_0 < U < U_1$  nahezu unabhängig von  $U$  (sog. *Geigerplateau*). Unterhalb der Einsetzspannung  $U_0$  ist die Rate Null, oberhalb der Spannung  $U_1$  finden Nachentladungen des Rohrs

statt.

## 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Impulsrate eines Geiger-Müller Zählrohrs in konstantem Abstand vom radioaktiven Präparat  $^{137}\text{Cs}$  als Funktion der Zählrohrspannung.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie die zeitabhängige Impulsrate infolge der von  $^{137\text{m}}\text{Ba}$  emittierten  $\gamma$ -Strahlung nach Eluation (Ausspülung) aus dem  $^{137}\text{Cs}$ . Bestimmen Sie aus dem Ergebnis die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  von  $^{137\text{m}}\text{Ba}$ .
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie die zeitabhängige Impulsrate infolge der  $\gamma$ -Strahlung, die von neu in  $^{137}\text{Cs}$  gebildetem  $^{137\text{m}}\text{Ba}$  nach Eluation emittiert wird. Bestimmen Sie aus dem Ergebnis ebenfalls die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  von  $^{137\text{m}}\text{Ba}$ .

## 4. Versuchsaufbau

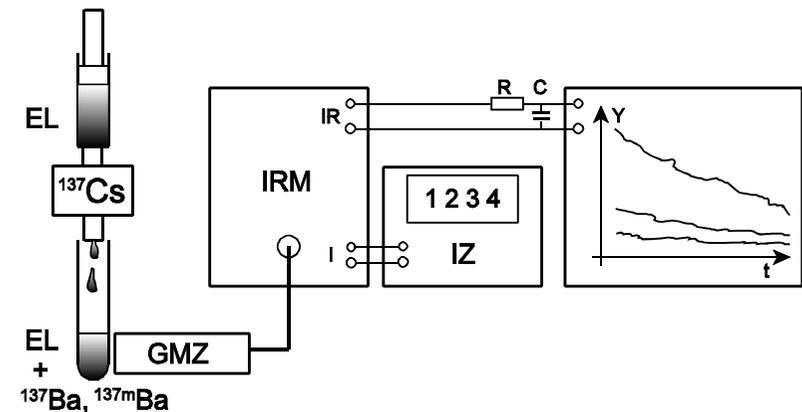


Abb. 6:  $^{137}\text{Cs}$  Isotopengenerator; EL Eluationsflüssigkeit zur Auswaschung des  $^{137\text{m}}\text{Ba}$  und  $^{137}\text{Ba}$ ; GMZ Geiger-Müller-Zählrohr angeschlossen an Impulsratenmesser IRM; Impulszählung über dessen Ausgang I mit Impulszähler IZ; analoge Bestimmung der Impulsrate  $R(t)$  über dessen Ausgang IR mit einem Y-t-Schreiber

Den Versuchsaufbau zeigt schematisch Abb.6: Das im Versuch benutzte Ausgangspräparat, der sog. *Isotopengenerator*  $^{137}\text{Cs}$  ist als schwer lösliches Salz gebunden von einem zylindrischen Behälter umschlossen. Öffnungen des Behälters an der oberen und unteren Stirnseite gestatten es, eine Eluationslösung (angesäuerte Kochsalzlösung) mittels einer Spritze durch das Salz zu pressen, wobei das leichter lösliche Zerfallsprodukt des  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{137\text{m}}\text{Ba}$  und  $^{137}\text{Ba}$ , mit der durchgepressten Eluationsflüssigkeit in einem unter den Isotopengenerator gehaltenes Reagenzglas aufgefangen wird.

Das dicht am Reagenzglas positionierte Geiger-Müller-Zählrohr GMZ registriert die vom  $^{137\text{m}}\text{Ba}$  emittierte  $\gamma$ -Strahlung durch eine zur Strahlungsintensität proportionale Anzahl von Entladungsimpulsen. Diese werden mit dem Impulsratenmesser IRM (mit einstellbarer Zählrohrspannung) über dessen Impulsausgang I direkt vom Impulszähler IZ über das Messzeitfenster von 1 sec. gezählt digital angezeigt (Impulsrate  $R = \text{Anzahl der Impulse pro sec.}$ ).

Der analoge Impulsratenausgang IR des Gerätes gestattet zum Anderen die Aufzeichnung einer zur Aktivität  $A(t)$  und Impulsrate  $R(t)$  proportionalen zeitabhängigen Spannung  $U(t)$  mit einem Y-t-Schreiber. Zur Glättung der mit  $A$  zeitlich stark fluktuierenden Spannung  $U(t)$  dient ein sog. *RC-Filter*. Dieses verzögert die durch die am Eingang des Filters auftretenden Spannungsschwankungen verursachten Lade- bzw. Entladeströme des Kondensators  $C$  infolge des Widerstands  $R$  auf ein Zeitintervall  $\tau = R C (= 7 \text{ s})$ . Die am Filterausgang anliegende Kondensatorspannung mittelt damit zeitliche Änderungen der Eingangsspannung  $U(t)$  für Zeitintervalle  $t < \tau$  heraus.

## 5. Versuchsdurchführung und Auswertung

### 5.1 Impulsrate des Zählrohrs $R(U)$

Bei den durchzuführenden Messungen wird vorausgesetzt, dass der Isotopengenerator mindestens eine halbe Stunde vorher nicht eluiert wurde, d.h. dass er sich im radioaktiven Gleichgewicht befindet.

Zur Bestimmung der Impulsrate  $R$  des verwendeten Zählrohrs als Funktion der Zählrohrspannung  $U$  wird der Isotopengenerator **nur durch den studentischen Betreuer** aus dem Aufbewahrungsschrank für radioaktive Präparate entnommen und mit der beschrifteten Stirnseite nach oben zeigend in eine im Stativ eingespannte spezielle Halterung gelegt. Das Zählrohr wird nach vorsichtigem Entfernen der Schutzkappe am Fenster im gleichen Stativ so eingespannt, dass es seitlich möglichst dicht am Isotopengenerator anliegt.

Stellen Sie nun die Spannung des Impulsratenmessers mittels eines Stufenschalters

und eines kontinuierlichen Reglers auf etwa 200 V ein und bestimmen Sie fünfmal (falls eine Messrate festgestellt wird) mit dem Impulszähler die Impulsrate des Zählrohrs. Erhöhen Sie danach die Spannung um jeweils ca. 50 V und wiederholen Sie die Messung bis zur maximal einstellbaren Spannung (ca. 740V). Versuchen Sie danach gegebenenfalls durch geeignete Messungen innerhalb kleinerer Spannungsintervalle die Einsetzspannung des Zählrohrs genauer zu bestimmen.

Tragen Sie in der Auswertung die für jede Spannung gemittelte Impulsrate  $R$  als Funktion der Spannung  $U$  mit der jeweiligen Standardabweichung der Messreihe als (+/-)-Fehlerbalken auf. Bestimmen Sie durch eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte oberhalb der Einsetzspannung die (erwartet geringe) Steigung der Kennlinie  $R(U)$  im Bereich des Geigerplateaus. Diskutieren Sie mögliche Abweichungen Ihrer Messergebnisse vom erwarteten Ergebnis.

### 5.2 Impulsrate $R(t)$ des Eluats

Für die Messungen ist der Isotopengenerator **vom studentischen Betreuer** aus der Halterung zu entfernen, diese seitlich wegzuschwenken, die Schutzkappe auf das Zählrohr aufzusetzen und ein Reagenzglas so einzuspannen, dass sich sein unteres Ende (ca. 2 cm) dicht vor dem Zählrohr befindet (s. Abb.6).

Die Zählrohrspannung ist auf ca. 460 V (360 V + 100 V) einzustellen, der Analogausgang des Ratemeters IR mit dem unter den Ausgangsbuchsen liegenden Wahlschalter auf 10 Imp./s . Der angeschlossene Y-t-Schreiber wird auf Y: 0,5 V/cm, var.; t: 10s/cm, cal. eingestellt. Nach Einstellung des Nullpunkts auf dem eingespannten Millimeterpapier ist die Zeitablenkung des Schreibers zu starten und in einem Durchlauf die Spannung des Ratemeters ohne Präparat für ca. 250 s (= 25 cm) probeweise zu bestimmen. Nach Einlegen eines neuen Papiers und Einstellung des Nullpunkts wird das Eluat in das Reagenzglas gefüllt.

**Der Umgang mit dem Isotopengenerator sowie das Herstellen bzw. Einfüllen des Eluats in das Reagenzglas ist nur durch den studentischen Betreuer vorzunehmen. Schutzhandschuhe!**

Zur Herstellung des Eluats werden mit der dem Isotopengenerator beiliegenden Spritze sowie einem ebenfalls beiliegenden aufgesteckten kurzen Schlauchstück aus dem Gefäß der Eluationslösung etwa 2 bis 3 ml Flüssigkeit angesaugt. Danach wird der Schlauch von der Spritze entfernt und diese auf den an der beschrifteten Stirnseite des Generators zuvor geöffneten Anschluss aufgeschraubt. Während das untere ebenfalls geöffnete Ende des Isotopengenerators über das Reagenzglas zu halten ist, wird durch vorsichtiges Drücken der Spritze die Eluationsflüssigkeit innerhalb von 10 - 20 s durch den Isotopengenerator gepresst. Danach ist die

Spritze vom Isotopengenerator zu trennen, dieser mit den Schutzkappen zu versehen, mit Spritze und Schlauch in den Vorratsbehälter zurückzulegen und vom Eluat zu entfernen.

Nach optimaler Einstellung der Y-Achse des Schreibers (maximaler Ausschlag auf dem Papier) ist dieser zu starten und die zeitabhängige (gefilterte) Spannung  $U_R$  des Ratemeters für 750 s zu registrieren. Dazu ist die Zeitablenkung zweimal unmittelbar nach dem jeweiligen Reset (ca. 250 s) ohne Papierwechsel erneut zu starten. Zur Bestimmung des Strahlungsuntergrundes bzw. der entsprechenden Restspannung  $U_{R0}$  des Ratemeters wird das Reagenzglas vom Zählrohr entfernt und der Schreiber ein weiteres Mal für 250 s gestartet.

In der Auswertung ist die Schreiberspannung  $U_R$  nach Abzug eines zeitlichen gemittelten Untergrundes  $U_{R0}$  in cm-Einheiten in Abständen von jeweils 10 s zu bestimmen und ihr Logarithmus über der Zeit aufzutragen, also  $\ln(U_R - U_{R0})$  über  $t$ . Bestimmen Sie aus der Steigung einer Ausgleichsgeraden durch die Messpunkte die Zerfallskonstante  $\lambda$  sowie die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  des  $^{137m}\text{Ba}$ -Isotops. Schätzen Sie den Fehler von  $\lambda$  bzw.  $T_{1/2}$  über den bei der Bestimmung der Geradensteigung ab und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Literaturwerten.

### 5.3 $\gamma$ -Impulsrate $R(t)$ des Isotopengenerators nach Eluation

Der Versuchsaufbau entspricht dem der ersten Aufgabe. Wie zuvor ist **nur der studentische Betreuer** befugt, mit dem Isotopengenerator und dem Eluat umzugehen. Um sicherzustellen, dass lediglich die  $\gamma$ -Strahlung vom Zählrohr registriert wird, ist auf seine schwarze Schutzkappe eine weitere aus Aluminium (2mm Dicke) aufzustecken. Unter den Isotopengenerator wird ein Becherglas gestellt, auf ihn die mit Eluationsflüssigkeit wie zuvor gefüllte Spritze geschraubt.

Vor der Eluation wird die  $\gamma$ -Empfindlichkeit des Schreibers so eingestellt, dass die der Impulsrate entsprechende Spannung  $U_R$  eine Linie am oberen Rand des neu eingelegten Schreiberpapiers erzeugt. Um zu garantieren, dass sich im Rahmen der Messgenauigkeit radioaktives Gleichgewicht (Gl. 8) eingestellt hat, ist mindestens 20 min. nach der zuletzt durchgeführten Eluation zu warten. Starten Sie danach die Zeitablenkung des Schreibers, um eine der konstanten Aktivität  $A_1$  entsprechende Spannung  $U_{R1}$  über 250 s aufzuzeichnen.

Danach ist die Eluation wie in Aufgabe 1 durchzuführen. Dabei wird der Isotopengenerator aus der Halterung genommen, die Eluationsflüssigkeit durch den Generator gedrückt und das Eluat im Reagenzglas aufgefangen. Unmittelbar danach wird der Generator in die Halterung zurückgestellt, das Reagenzglas entfernt und der Schreiber gestartet. Zeichnen Sie wie bei der 2. Aufgabe die der Impulsrate entsprechende Spannung  $U_R$  über 500 s auf.

Nach der Messung wird der Isotopengenerator **vom studentischen Betreuer** im Behälter zur Aufbewahrung in den Präparateschrank zurückgelegt. Das Eluat kann nach einer Wartezeit von einer halben Stunde unter Wasserspülung im Ausguss entsorgt werden.

Bei der Auswertung ist wie in Aufgabe 2 zu verfahren, nur das hier die Differenz von einer gemittelten Spannung  $U_{R1}$  und der Messspannung  $U_R(t)$  zu bestimmen und logarithmisch aufzutragen ist. Bestimmen Sie aus der Steigung einer Ausgleichsgeraden durch die Messpunkte mit Gl. (7) ebenfalls die Zerfallskonstante  $\lambda$  bzw. Halbwertszeit  $T_{1/2}$  von  $^{137m}\text{Ba}$  und diskutieren Sie das Ergebnis im Vergleich zum Literaturwert.

Anmerkung: Da bei der Auswertung dieser Messung anders als zuvor die Differenz von zwei mit größeren Schwankungen versehenen Spannungen gebildet wird, kann im Ergebnis eine größere Differenz zum Literaturwert auftreten als zuvor. Es empfiehlt sich daher, die Messzeit bzw. das Zeitintervall für die Geradenanpassung so zu beschränken, dass die in der logarithmischen Auftragung mit wachsender Zeit zunehmende Streuung der Messpunkte die Festlegung der Geradensteigung möglichst wenig beeinflusst.

Literaturdaten zur Kernumwandlung  $^{137}\text{Cs} - ^{137}\text{Ba}$ :

$^{137}\text{Cs}$ :  $T_{1/2} = 30,2 \text{ a}$ ;  $^{137m}\text{Ba}$ :  $T_{1/2} = 153 \text{ s}$

$E_{\beta 1} = 1,173 \text{ MeV}$  (6 %);  $E_{\beta 2} = 0,511 \text{ MeV}$  (94 %);  $E_{\gamma} = 0,6616 \text{ MeV}$

### 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Was geschieht bei der Anregung, was bei der Umwandlung eines Atomkerns, was ist mit *radioaktivem Zerfall* gemeint?
- 2) Was sind die wichtigsten spontanen Kernumwandlungen?
- 3) Wie ändern sich die Größen  $A$ ,  $N$ ,  $Z$  beim  $\alpha$ - und  $\beta$ -Zerfall und welche Teilchen werden dabei emittiert?
- 4) Was bedeuten Begriffe wie Nuklid, Isotop, Isobar?
- 5) Zeichnen Sie das Umwandlungsschema von  $^{137}\text{Cs}$ .
- 6) Leiten Sie das Zerfallsgesetz her! Was bedeuten *Zerfallskonstante*, *Lebensdauer*, *Halbwertszeit* u. *Aktivität*?
- 7) Erklären Sie die Ionisation durch  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen!
- 8) Wie funktioniert ein Geiger-Müller-Zählrohr?

## Versuch B15: $\beta$ -Spektroskopie

**1. Literatur:** Walcher, Praktikum der Physik  
Gerthsen/Kneser/Vogel, Physik  
Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik,  
Bd. IV,2: Aufbau der Materie  
Schpolksi, Atomphysik, Bd. I u. II

**Stichworte:** Kernumwandlungen, Radioaktivität,  $\alpha$ -,  $\beta$ -Zerfall, Aktivität, Zerfallsgesetz, Nachweis radioaktiver Strahlung durch Ionisation, Geiger-Müller-Zählrohr

## 2. Grundlagen

### 2.1 Kernumwandlung und radioaktiver Zerfall

Bei einer Kernumwandlung geht der Atomkern eines Nuklids  $X^A_Z$  (Atomart mit Massen- bzw. Nukleonenzahl A, ( $A = Z$  Protonen + N Neutronen) in den Atomkern eines anderen Nuklids oder in mehrere Atomkerne verschiedener Nuklide über. Die Umwandlung kann spontan oder erzwungen (z.B. durch Teilchenbeschuss) erfolgen. Die spontane Kernumwandlung eines instabilen Nuklids ist im Allg. mit der Emission eines energiereichen ionisierenden Teilchens verbunden.

Die wichtigsten spontanen Kernumwandlungen sind der  $\alpha$ - und der  $\beta$ -Zerfall: Beim  $\alpha$ -Zerfall wird ein  $\alpha$ -Teilchen (He-Atomkern) emittiert, beim  $\beta^+$ -Zerfall ein  $\beta^+$ -Teilchen (Positron bzw. Elektron) zusammen mit einem Neutrino  $\nu_e$  bzw. Antineutrino  $\bar{\nu}_e$ . Befindet sich der bei der Umwandlung entstehende Atomkern nicht im Grundzustand, kann er durch  $\gamma$ -Zerfall in diesen übergehen und gibt dabei seinen Energieüberschuss in Form von  $\gamma$ -Strahlung (energiereichen Photonen) ab.

Man spricht bei einer spontanen Kernumwandlung wegen der ionisierenden Wirkung der emittierten Teilchen auch von einer *radioaktiven Kernumwandlung* bzw. von einem *radioaktiven Zerfall*. Die verschiedenen Zerfallstypen zeigt Abb. 1 in einem Energieschema.

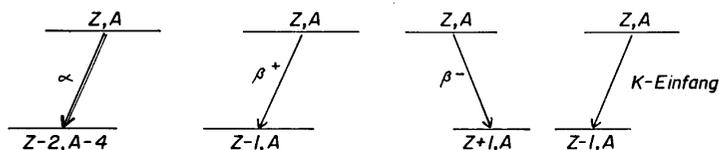


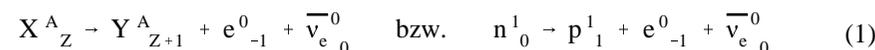
Abb.1: Spontane Kernumwandlungen, schematisch

Kenntnisse über Grundlagen zum radioaktiven Zerfall (Zerfallstypen, Zerfallsgesetz, Aktivität, Zerfallskonstante, mittlere Lebensdauer, Halbwertszeit, sowie Reichweite, Ionisationsvermögen und Nachweis radioaktiver Strahlung werden hier vorausgesetzt. Es wird auf die z.B. angegebene Literatur sowie die Versuchsanleitungen *B12: Geschwindigkeit von  $\alpha$ -Teilchen* sowie *B13: Radioaktiver Zerfall* verwiesen.

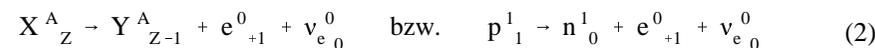
### 2.2 $\beta$ -Zerfall

Beim  $\beta$ -Zerfall wandelt sich ein Nuklid mit der Kernladungszahl Z - bei gleichbleibender Massenzahl A - in ein Nuklid mit der Kernladungszahl Z + 1 bzw. Z - 1 um. Man unterscheidet drei verschiedene Kernumwandlungen: den  $\beta^-$ -Zerfall, den  $\beta^+$ -Zerfall und den K-(Elektronen)-Einfang.

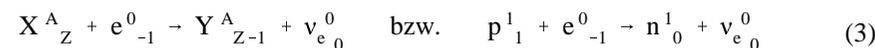
Beim  $\beta^-$ -Zerfall wandelt sich das Nuklid  $X^A_Z$  in das Nuklid  $Y^A_{Z+1}$  um. Es wird im Atomkern ein Neutron ( $n^1_0$ ) in ein Proton ( $p^1_1$ ) umgewandelt. Unter Erhaltung der elektrischen Ladung wird ein Elektron ( $e^0_{-1}$ ) und unter Erhaltung der Leptonenzahl<sup>1)</sup> ein (nahezu masseloses) Elektron-Antineutrino ( $\bar{\nu}_e^0_0$ ) emittiert.



Beim  $\beta^+$ -Zerfall wandelt sich das Nuklid  $X^A_Z$  in das Nuklid  $Y^A_{Z-1}$  um. Es wird im Atomkern ein Proton ( $p^1_1$ ) in ein Neutron ( $n^1_0$ ) umgewandelt. Unter Erhaltung von elektrischer Ladung und Leptonenzahl werden ein Positron ( $e^0_{+1}$ ) und ein (nahezu masseloses) Elektron-Neutrino ( $\nu_e^0_0$ ) emittiert. Die Atomhülle gibt ein überschüssiges Elektron ab.



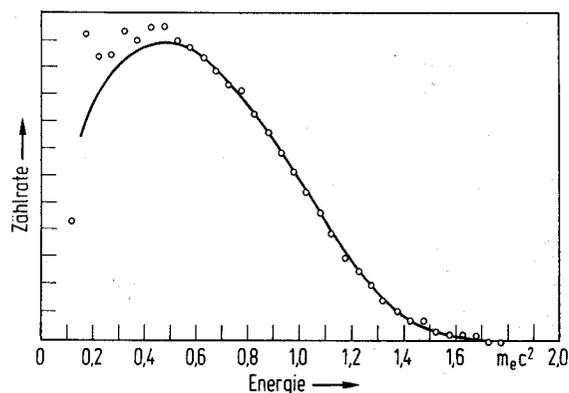
Beim K-Einfang wandelt sich ebenfalls das Nuklid  $X^A_Z$  in das Nuklid  $Y^A_{Z-1}$  um, d.h. es wird im Atomkern ebenfalls ein Proton ( $p^1_1$ ) in ein Neutron ( $n^1_0$ ) umgewandelt, wobei jedoch anstelle der Emission eines Positrons die Absorption eines Elektrons (vorzugsweise aus der kernnahen K-Schale des Atoms) stattfindet.



1) Leptonen sind das Elektron e, das Myon  $\mu$ , die Neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  und ihre Antiteilchen

### 2.3 $\beta$ -Energiespektrum

Die beim  $\beta$ -Zerfall instabiler Nuklide freigesetzte Energie verteilt sich auf die kinetische Energie der  $\beta^\pm$ -Teilchen und der Neutrinos  $\nu_e$  bzw.  $\bar{\nu}_e$ . Man beobachtet ein kontinuierliches Spektrum der kinetischen Energie der emittierten  $\beta^\pm$ -Teilchen.



**Abb.2:** Energiespektrum der beim  $\beta$ -Zerfall freier Neutronen emittierten Elektronen

Abb.2 zeigt beispielhaft ein Messergebnis zur Zählrate der beim  $\beta$ -Zerfall freier Neutronen emittierten Elektronen in Abhängigkeit ihrer kinetischen Energie. Diese ist in Einheiten ihrer Ruhenergie ( $E_0 = m_0 c^2 = 511 \text{ keV}$ ) aufgetragen. Die maximale kin. Energie  $E_{\text{max}}$ , d.h. die freigesetzte Energie, ergibt sich hier theoretisch aus der beim  $\beta$ -Zerfall, Gl.(1), auftretenden Massendifferenz (unter Vernachlässigung des Antineutrinos) zu

$$E_{\text{max}} = \frac{m_n - m_p - m_0}{m_0} E_0 = 1,531 E_0 \quad (4)$$

Diese stimmt mit dem experimentellen Ergebnis überein. Des weiteren beobachtet man beim Energiespektrum des  $\beta$ -Zerfalls ein Maximum der Zählrate, welches allgemein bei etwa  $1/3 E_{\text{max}}$  liegt.<sup>2)</sup>

2) Eine genauere Betrachtung zeigt unterschiedliche Spektren von  $\beta^+$ - und  $\beta^-$ -Zerfall aufgrund der unterschiedlichen Wechselwirkung zwischen dem Coulombfeld des Kerns und der unterschiedlich geladenen  $\beta$ -Teilchen.

Darüber hinaus können im Energiespektrum der  $\beta$ -Teilchen bei diskreten Energien die Linien sog. *Konversionselektronen* aus der Atomhülle auftreten, welche durch direkte Übertragung der Anregungsenergie des Kernzustandes freigesetzt werden. Ebenso können Linien sog. *Augerelektronen*, d.h. freigesetzter Atomhüllenelektronen infolge der Absorption der beim K-Einfang emittierten charakteristischen Röntgenstrahlung auftreten (s. auch Versuch B10: *Versuch mit Röntgenstrahlen*).

### 2.4 $\beta$ -Spektrometer

Die kinetische Energie der  $\beta$ -Teilchen wird oft magnetisch bestimmt, so auch im vorliegenden Versuch. Die Teilchen durchlaufen in einem sog. *Impulsfilter* z.B. ein zu ihrer Geschwindigkeit transversales homogenes Magnetfeld  $B$ , wodurch ihre Bahn infolge der Lorentzkraft einen Kreisbogen beschreibt. Aufgrund mehrerer geeignet angebrachter Spalte passieren nur solche Teilchen das Filter, deren Kreisbahn einen bestimmten Radius  $r$  ( $\pm \Delta r$ ) hat (s.u. Versuchsaufbau).

In dieser Kreisbahn ist die wirkende Zentripetalkraft  $F = m v^2/r$  gleich der Lorentzkraft  $F_L = e v B$  und damit der Impuls  $p = m v$  der Teilchen

$$p = m v = e B r \quad (5)$$

Die Gesamtenergie  $E$  der  $\beta$ -Teilchen ist relativistisch gerechnet

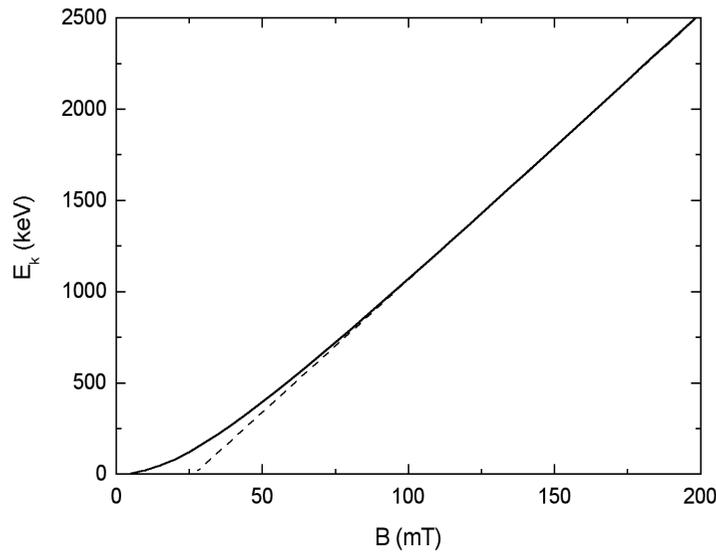
$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (6)$$

Ihre kinetische Energie  $E_k$  ergibt sich aus der Differenz von Gesamtenergie  $E$  und Ruhenergie  $E_0$  mit Gl.(5) zu

$$E_k = E_0 \left( \sqrt{\left( \frac{e B r}{m_0 c} \right)^2 + 1} - 1 \right) \quad (7)$$

Das im Versuch benutzte Spektrometer hat einen Kreisbahnradius  $r = 5 \text{ cm}$ . Damit ergibt sich numerisch der Zusammenhang zwischen  $E_k$  und  $B$ :

$$E_k = 511 \left[ \left( \left( 8,59 \times 10^{-4} (\text{B/mT})^2 + 1 \right)^{1/2} - 1 \right) \right] \text{keV} \quad (7a)$$



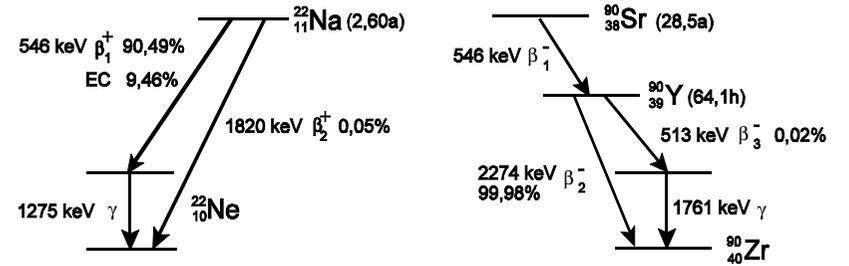
**Abb.3:** Kinetische Energie  $E_k$  der transmittierten  $\beta$ -Teilchen als Funktion der magn.Induktion  $B$  des im Versuch benutzten Spektrometers

Abb.3 zeigt den Zusammenhang  $E_k(B)$  für das im Versuch benutzte Spektrometer. Für Energien  $E_k$  oberhalb der Ruhenergie  $E_0$  ist  $E_k$  nahezu linear von  $B$  abhängig.

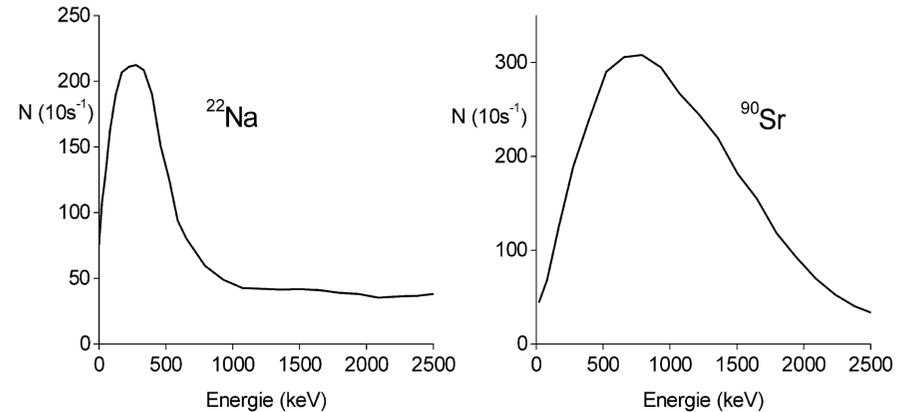
### 2.5 $\beta$ -Zerfall von $^{22}\text{Na}$ und $^{90}\text{Sr}$

Die Zerfallsdiagramme der im Versuch benutzten Nuklide  $^{22}\text{Na}$  und  $^{90}\text{Sr}$  sind in Abb. 4 schematisch dargestellt.  $^{22}\text{Na}$  zerfällt mit einer Halbwertszeit von 2,6 Jahren zu 90,49% unter  $\beta_1^+$ -Emission (546 keV) und zu 9,46% unter Elektroneinfang in einen angeregten Zustand des Nuklids  $^{22}\text{Ne}$ , der unter  $\gamma$ -Emission (1275 keV) in den Grundzustand übergeht. Ein geringer (0,05%) und im Versuch nicht festzustellender Anteil des  $^{22}\text{Na}$  zerfällt unter  $\beta_2^+$ -Emission (1820 keV) direkt in den Grundzustand von  $^{22}\text{Ne}$ .

$^{90}\text{Sr}$  zerfällt mit einer Halbwertszeit von 28,5 Jahren unter  $\beta_1^-$ -Emission (546 keV) in das instabile Nuklid  $^{90}\text{Y}$ , welches mit einer Halbwertszeit von 64,1 Stunden hauptsächlich (99,98%) unter  $\beta_2^-$ -Emission (2274 keV) in den Grundzustand von  $^{90}\text{Zr}$  zerfällt. Ein geringer, hier nicht messbarer Teil (0,02%) zerfällt unter  $\beta_3^-$ -Emission (513 keV) in einen angeregten Zustand des  $^{90}\text{Zr}$  und nachfolgend unter  $\gamma$ -Emission (1761 keV) in dessen Grundzustand.



**Abb.4:** links:  $\beta^+$ -Zerfallsschema von  $^{22}\text{Na}$ , rechts:  $\beta^-$ -Zerfallsschema von  $^{90}\text{Sr}$



**Abb.5:**  $\beta$ -Spektren von  $^{22}\text{Na}$  und  $^{90}\text{Sr}$ , schematisch

Abb. 5 zeigt schematisch die Energiespektren der beiden im Versuch benutzten Radionuklide. Das  $^{22}\text{Na}$ -Spektrum hat ein Maximum bei ca. 250 keV entsprechend einer maximalen kinetischen Energie von ca. 750 keV, etwas größer als die im Zerfallsschema maximale Energie des  $\beta_1^+$ -Teilchens. Der energieunabhängige Untergrund des Spektrums rührt von der  $\gamma$ -Strahlung her, zum einen von der 1275 keV-Linie, zum anderen von der Vernichtungsstrahlung (511 keV), welche emittiert wird, wenn das Positron auf ein Elektron trifft.

Das Spektrum von  $^{90}\text{Sr}$  hat ein Maximum bei ca. 750 keV, entsprechend einer maximalen kinetischen Energie von ca. 2250 keV, in Übereinstimmung mit der

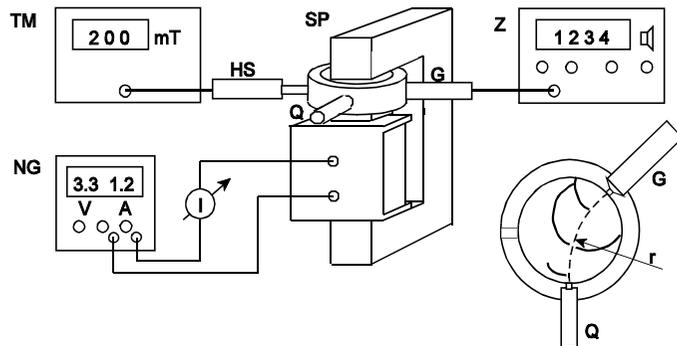
Maximalenergie des  $\beta_2$ -Teilchens. Ein weiteres Maximum im Energiespektrum des  $^{90}\text{Sr}$  infolge des  $\beta_1$ -Teilchens ist nicht zu erkennen. Da die Emission des  $\beta_3$ -Teilchens und der 1761 keV  $\gamma$ -Strahlung sehr unwahrscheinlich ist, stellt das Nuklid  $^{90}\text{Sr}$  einen praktisch reinen  $\beta$ -Strahler dar.

### 3. Aufgabenstellung

1. **Aufgabe:** Bestimmen Sie mit dem  $\beta$ -Spektrometer die Impulsrate  $N$  infolge der von dem Nuklid  $^{90}\text{Sr}$  emittierten Strahlung als Funktion des Magnetfeldes  $B$ .
2. **Aufgabe:** Bestimmen Sie mit dem  $\beta$ -Spektrometer die Impulsrate  $N$  infolge der von dem Nuklid  $^{22}\text{Na}$  emittierten Strahlung als Funktion des Magnetfeldes  $B$ .
3. **Aufgabe:** Bestimmen Sie aus den in der 1. und 2. Aufgabe ermittelten Zählraten  $N(B)$  die Zählraten  $N(E)$  als Funktion der kinetischen Energie (Energiespektren)

### 4. Versuchsaufbau

Abb.6 zeigt den Versuchsaufbau schematisch. Das Spektrometer SP besteht aus zwei flachen vertikal gegenüberliegenden Polschuhen, die oben und unten über einen Transformator-Eisenkern mit aufgesteckter Spule magnetisch verbunden



**Abb.6:** Versuchsaufbau schematisch, mit  $\beta$ -Spektrometer SP, Strahlungsquelle Q, Geiger-Müller-Zählrohr G, Zählgerät Z, Hallsonde HS, Teslameter TM, Netzgerät NG, Amperemeter I; rechts das Spektrometer im Schnitt auf Teilchenbahnhöhe (Radius  $r$ )

sind. Die Anordnung stellt einen Elektromagneten mit Luftspalt dar. Das nahezu homogene Magnetfeld  $B$  im Spalt zwischen den Polschuhen kann durch Verändern des Spulenstroms  $I$ , welchen das Netzgerät NG liefert, verändert werden. Es wird mit einer in den Spalt hineinragenden Hallsonde HS gemessen und vom Teslameter angezeigt. Am Rande des Spaltes sind mittels eines nichtmagnetischen Metallrings die Strahlungsquelle Q und das Geiger-Müller-Zählrohr so gegenüber angebracht, dass die von Q emittierten  $\beta$ -Teilchen nur über eine Kreisbogenbahn mit Radius  $r$  ( $= 5\text{cm}$ ) in das Zählrohr gelangen und vom Zählgerät registriert werden. Im Spalt angebrachte Blenden begrenzen die Kreisbahn auf einen Radiusbereich  $\Delta r \ll r$  und damit den Durchlassbereich  $\Delta p \ll p$  des Teilchenimpulses, s. Gl. (5).

### 5. Versuchsdurchführung

#### 5.1 Zählrate von $^{22}\text{Na}$

Nach Anschließen und Einschalten aller Geräte ist zunächst die vom Zählrohr registrierte Untergrundstrahlung  $N_0$  zu bestimmen. Das Zeitfenster des Zählgerätes ist auf 10 s einzustellen. Gegebenenfalls kann der Lautsprecher eingeschaltet werden, um die registrierten Impulse hörbar zu machen. Nach Drücken der Start/Stoptaste des Zählers werden die Impulse im Zeitfenster von 10 s gezählt, danach bleibt die Anzeige stehen. Durch Drücken der Reset-Taste und erneutes Starten kann die Messung wiederholt werden.

Bestimmen Sie die Rate  $N_0$  jeweils fünfmal bei eingestellten Magnetfeldern von ca. 10, 100 und 200 mT. Der Mittelwert von  $N_0$  ist später in der Auswertung von allen Raten der Präparate abzuziehen.

Danach ist das  $^{22}\text{Na}$ -Präparat **nur vom studentischen Betreuer** aus dem Aufbewahrungsschrank zu holen, aus der Abschirmung zu nehmen und in das Spektrometer einzubauen. Variieren Sie darauf bei eingeschaltetem Lautsprecher den Spulenstrom und damit das Magnetfeld zwischen ca. 10 und 200 mT und ermitteln Sie probeweise bei einigen Magnetfeldern die Zählrate. Gegebenenfalls ist das Magnetfeld durch Vertauschen der Spulenanschlüsse umzupolen.

Bei der Durchführung der eigentlichen Messungen ist das Magnetfeld  $B$  von 10 mT bis 200 mT in Schritten von 10 mT zu erhöhen und für jedes Feld die Zählrate  $N$  jeweils fünfmal zu bestimmen. Danach ist das Präparat sofort **vom Betreuer** aus dem Spektrometer herauszunehmen, in die Abschirmung zu stecken und in den Schrank zurückzulegen.

#### 5.2 Zählrate von $^{90}\text{Sr}$

Nach Umpolen der Spulenanschlüsse (warum?) und Einbau des  $^{90}\text{Sr}$ -Präparats

**durch den Betreuer** ist die Messung analog zur der von  $^{22}\text{Na}$  durchzuführen, nach der Messung das Präparat unverzüglich **vom Betreuer** in den Schrank zurückzulegen.

## 6. Versuchsauswertung und Diskussion

In der Auswertung der Messungen ist für jedes Feld B jeweils der Mittelwert und die Standardabweichung  $s$  von  $N$  zu berechnen, ebenso mit Gl. (7a) die dem Feld entsprechende kinetische Energie  $E_k$ . Tragen Sie  $N - N_0$  mit Fehlerbalken  $\pm s$  über der kinetischen Energie  $E_k$  für die Nuklide  $^{22}\text{Na}$  und  $^{90}\text{Sr}$  auf.

Diskutieren Sie Ihr Ergebnis im Zusammenhang mit den Zerfallsschemata für  $^{22}\text{Na}$  und  $^{90}\text{Sr}$ . Bestimmen Sie dazu die Energie des Maximums der Zählrate des jeweiligen Nuklids und den Fehler anhand der Fehlerbalken der Raten und vergleichen Sie diese Energie mit der ermittelten maximalen kinetischen Energie bzw. den in den Zerfallsschemata aufgeführten maximalen Energien der  $\beta$ -Teilchen.

### Anmerkungen zu Korrekturen:

Bei einer genaueren, kritischen Betrachtung der in diesem Versuch ermittelten Zählraten  $N(E_k)$  ist für eine weiterführende Diskussion im Vergleich mit Literaturdaten zur Wahrscheinlichkeit  $w(E_k)$  der im jeweiligen  $\beta^\pm$ -Zerfall auftretenden Energien der emittierten  $\beta$ -Teilchen u. a. Folgendes zu berücksichtigen:

a) Das hier zur Bestimmung der Zählrate  $N(B)$  bzw.  $N(p)$  benutzte Messintervall  $\Delta B$  bzw.  $\Delta p$  ist bei einem durch die Konstruktion des Spektrometers vorgegebenen Radiusbereich  $\Delta r$  bzw. bei einer im Bereich der Teilchenbahnen vorgegebenen Feldinhomogenität  $\Delta B/B$  nicht für alle Felder konstant sondern steigt  $\sim$  mit  $B$  an (s. Gl. (5)). Zur Korrektur der Zählrate bezogen auf ein jeweils konstantes Messintervall  $\Delta B$  wäre entsprechend numerisch eine Division der Zählrate durch eine Zahl  $\sim B$  nötig.

b) Das Intervall  $\Delta E_k$  der berechneten Zählrate  $N(E_k(B))$  ist - bezogen auf die Intervalle  $\Delta B$  bzw.  $\Delta p$  - ebenfalls nicht konstant, sondern ändert sich mit Gl. (7), s. Abb.3, wesentlich bei geringer Energie  $E_k \leq E_0$ . Zur Korrektur wäre eine weitere Division der Rate  $N(E_k)$  durch eine Zahl  $\sim dE_k/dB$  nötig.

c) Die Ansprechwahrscheinlichkeit des verwendeten Zählrohrs bezüglich  $\beta$ -Strahlen verschiedener Energien ist a priori nicht bekannt. Sie müsste durch Eichstrahler bestimmt werden.  $\beta$ -Teilchen erzeugen in Luft bei geringer Energie eine größere Ionisationsrate als bei hoher Energie. Es kann daher vermutet

werden, dass das Verhältnis der im vorliegenden Versuch ermittelte Zählraten bei geringer Energie zu denen bei höherer Energie ermittelten größer ist als das der Anzahlraten der  $\beta$ -Teilchen entsprechende.

Während Korrekturen aufgrund a) u. b) eine Erhöhung der in diesem Versuch ermittelten Zählrate der  $\beta$ -Teilchen bei geringer kinetischer Energie bewirken, hat die Korrektur aufgrund c) einen gegenteiligen Effekt. Die Summe der Korrekturen ist ohne Eichmessungen nicht genau zu quantifizieren. Es ist jedoch zu erwarten, dass - bezüglich der wahren Energieverteilung der  $\beta$ -Teilchen - die in diesem Versuch vor allem im Bereich kleiner Energien ( $E_k < E_0$ ) erzielten Messraten verglichen mit denen höherer Energie zu gering sind. Dies könnte bewirken, dass insbesondere das Maximum des Spektrums  $N(E_k)$  für  $^{22}\text{Na}$  nach Korrektur bei merklich kleinerer Energie liegt und damit in besserer Übereinstimmung mit Literaturdaten steht.

## 7. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Was wird mit dem Begriff *Radioaktiver Zerfall* beschrieben?
- 2) Welche Arten der Umwandlungen von Atomkernen unterscheidet man beim radioaktiven Zerfall?
- 3) Beschreiben Sie den  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Zerfall anhand der jeweils emittierten Teilchen.
- 4) Was bewirken die  $\alpha$ -,  $\beta$ - bzw.  $\gamma$ -Teilchen in Materie?
- 5) Wie kann man  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Teilchen nachweisen?
- 6) Beschreiben Sie anhand von Reaktionsgleichungen ( $X + \dots \rightarrow Y + \dots$ ) den  $\beta^\pm$ -Zerfall und K-Einfang hinsichtlich der Kernladungs- und Massenzahl der Nuklide  $X$  und  $Y$  sowie der jeweils absorbierten bzw. emittierten Teilchen.
- 7) Wie unterscheidet sich das Spektrum der kinetischen Energie der beim  $\alpha$ -Zerfall emittierten  $\alpha$ -Teilchen von dem der beim  $\beta^-$ - und  $\beta^+$ -Zerfall emittierten  $\beta$ -Teilchen?
- 8) Was bedeutet K-Elektronen-Einfang? Welche Strahlung wird dabei emittiert?
- 9) Beschreiben Sie, wie im vorliegenden Versuch die Verteilung von Impuls  $p$  bzw. kinetischer Energie  $E_k$  der  $\beta$ -Teilchen ermittelt wird. Was ist daraus zur Bestimmung der Anzahlverteilung der beim  $\beta$ -Zerfall emittierten Teilchen u.a. zu beachten?

### Versuch C3: Fourieranalyse akustischer und elektrischer Schwingungen

- 1. Literatur:** Bergmann-Schaefer, Experimentalphysik, Bd. I  
 Pohl, Einführung in die Physik, Bd. I  
 Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik  
 Stöcker, Taschenbuch der Physik, der Mathematik

**Stichworte:** Fourier-Reihe, F.-Koeffizienten, Grund- u. Oberschwingung, Fourier-Integral, Amplitudenspektrum, Diskrete FT, Abtasttheorem, Nyquistfrequenz, Aliasing-Effekt, gekoppelte Schwingkreise, Schwebung, Töne, Klänge, Klangfarbe, Geräusche, Rauschen, weißes Rauschen

#### 2. Grundlagen

##### 2.1 Fourieranalyse periodischer Funktionen

Schwingungen stellen zeitlich und räumlich periodische Vorgänge dar, die in der Naturwissenschaft und Technik von großer Bedeutung sind. Eine wichtige mathematische Methode zur Untersuchung periodischer Vorgänge oder Systeme stellt die *Fourieranalyse* dar. Die Grundlage hierfür bildet die Möglichkeit der Zerlegung einer (stückweise stetigen) periodischen Funktion in eine sog. *trigonometrische Reihe* oder *Fourierreihe*, d.h. in eine Summe von harmonischen d.h. Sinus- bzw. Cosinus-Funktionen (Jean-Paptiste-Joseph de Fourier, 1768-1830).

Demnach ist eine z.B. zeitlich periodische Funktion  $f(t)$  mit der Periode  $T$  darstellbar durch eine Summe harmonischer Schwingungen:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Periodendauer  $T$  der Funktion  $f(t)$  legt die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/T$  bzw. die Frequenz  $\nu = 1/T$  der *Grundschiwingung* mit den *Fourierkoeffizienten* (Amplituden)  $a_1$  und  $b_1$  fest. Der Verlauf von  $f(t)$  im Zeitintervall  $(0, T)$  bestimmt die Amplituden  $a_n$  und  $b_n$ , die *Fourierkoeffizienten* der sog. *n-ten harmonischen Oberschwingungen* mit den Kreisfrequenzen  $n\omega$ . Die Größe  $a_0/2$  ist der sog. *Gleichanteil* (Mittelwert von  $f(t)$ ).

Mit Gl. (1) genügt zur eindeutigen *Fourierdarstellung*  $\{a_n, b_n\}$  der periodischen Zeitfunktion  $f(t)$  die Bestimmung aller Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ . Praktisch ist jedoch in vielen Fällen zur hinreichend genauen Darstellung von  $f(t)$  lediglich nur eine endliche Anzahl von Summanden der Fourier-Reihe, d.h. ein trigonometrisches Polynom notwendig.

Für rechnerische Zwecke wird oft die komplexe Darstellung der Zeitfunktion  $f(t)$  benutzt:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) \quad (2)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-in\omega t) dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Für den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  und  $c_n$  gilt:

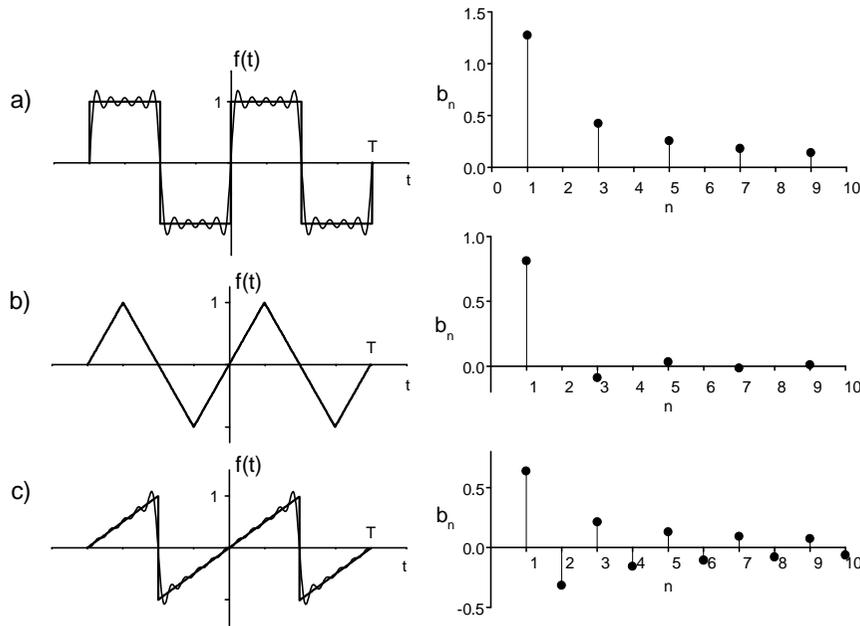
$$n = 0: \quad a_0 = 2c_0;$$

$$n > 0: \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (3)$$

Im Folgenden werden einige einfache periodische Zeitfunktionen und die Spektren ihrer Fourierkoeffizienten exemplarisch vorgestellt.

Der von einer Stimmgabel erzeugte Ton stellt eine Schallschwingung der Luft dar, die z.B. mittels eines Mikrofons durch die Wechselfspannung  $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$  dargestellt werden kann.  $U(t)$  hat in der spektralen Darstellung lediglich nur einen Fourierkoeffizienten  $b_1$ . Dieser ist mit Gln. (1)

$$b_1 = \frac{2U_0}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_0}{T} \int_0^T [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] dt = U_0 \quad (4)$$



**Abb.1:** Periodische a) Rechteck-, b) Dreieck-, c) Sägezahnfunktion; Links fett gezeichnet: Zeitfunktionen über zwei Perioden T; Rechts: Fourierkoeffizienten  $b_n$  für  $n = 1$  bis 10; Links dünn gezeichnet: Mit dargestellten Koeffizienten berechnete Zeitfunktionen

In Abb.1 sind drei einfache periodische Zeitfunktionen  $f(t)$ , die Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnfunktion sowie die (diskreten) Spektren ihrer mit Gln. (1) berechneten Fourierkoeffizienten  $b_n$  für  $n = 1$  bis 10 dargestellt. (Für die gezeigten ungeraden Zeitfunktionen sind alle  $a_n = 0$ ). Die lediglich mit den dargestellten Fourierkoeffizienten  $b_n$  berechneten Zeitfunktionen sind links in der Abbildung den ursprünglichen überlagert. Zu erkennen ist eine sehr gute Übereinstimmung bei der (überall stetigen) Dreiecksfunktion, für welche die Koeffizienten  $b_n$  auch vergleichsweise schnell gegen Null konvergieren. Bei der Rechteck- und Sägezahnfunktion ist jedoch in der Nähe der Unstetigkeitsstellen von  $f(t)$  wie z.B. bei  $t = \pm T/2$  ein deutliches Überschwingen der berechneten Funktionen zu erkennen. Dieses Überschwingen lässt sich durch Hinzunahme weiterer Fourierkoeffizienten zwar im Intervall der Stetigkeit, nicht jedoch unmittelbar an

der Unstetigkeitsstelle wesentlich reduzieren. Für  $n_{\max} \rightarrow \infty$  beträgt das Überschwingen ca. 9 % des Sprungs an der Unstetigkeitsstelle (*Gibbs-Phänomen*).

## 2.2 Fouriertransformation (FT) nichtperiodischer Signale

Auch nichtperiodische Funktionen wie z.B. zeitlich nicht periodische Vorgänge können mit Hilfe der Fouriertransformation spektral dargestellt werden. Hierzu wird das Periodizitätsintervall der Zeitfunktion  $f(t)$  auf  $T \rightarrow \infty$  ausgedehnt und entsprechend die Kreisfrequenz der Grundschwingung auf  $\omega \rightarrow 0$  reduziert. Aus der Darstellung von  $f(t)$  durch eine Fouriersumme, Gl.(1), wird ein *Fourierintegral* über das kontinuierliche Spektrum harmonischer Schwingungen  $a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t)$ . Die Fourier-Darstellung von  $f(t)$  und die der Fourierkoeffizienten  $a(\omega)$  und  $b(\omega)$  lautet dann:

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t)] d\omega \tag{5}$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t) dt$$

Die Darstellung der Funktion  $f(t)$  durch die (i.a. komplexe) *Fouriertransformierte* oder *Spektralfunktion*  $F(\omega)$  lautet entsprechend Gl.(2)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{6}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$

Die Größe  $|F(\omega)|$  nennt man *Amplitudenspektrum*,  $\varphi(\omega)$  das *Phasenspektrum* von  $f(t)$ . Für  $F(\omega)$  schreibt man auch  $F[f(t)]$ , für  $f(t)$  auch  $F^{-1}[F(\omega)]$ . Den Übergang  $f(t) \rightarrow F(\omega)$  nennt man *Fouriertransformation*, den Übergang  $F(\omega) \rightarrow f(t)$  inverse *Fouriertransformation*.

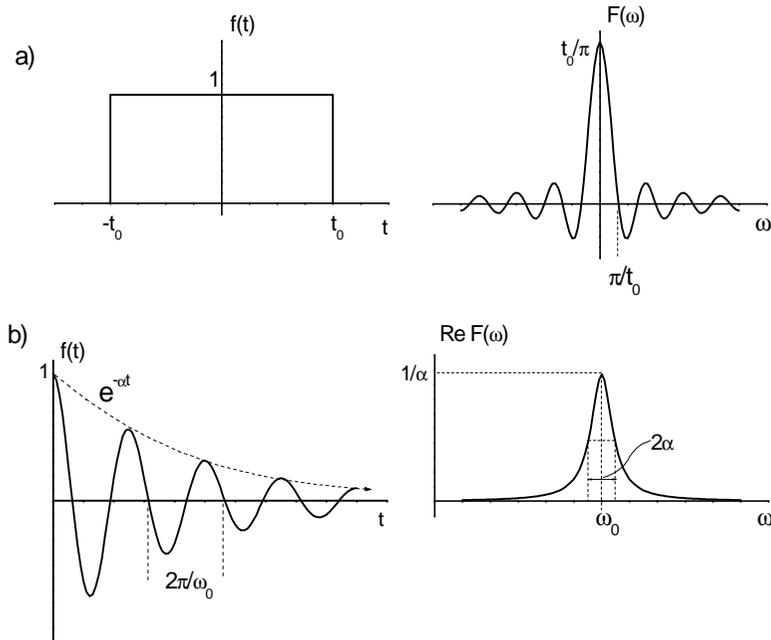
Das folgende Beispiel zeigt die FT für zwei nichtperiodische Zeitfunktionen:

a) Rechteckimpuls:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad F(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \quad (7a)$$

b) gedämpfte Schwingung:

$$f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) \quad \text{Re } F(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (7b)$$



**Abb. 2:** Zeitfunktionen  $f(t)$  und Fouriertransformierte  $F(\omega)$   
 a) für Rechteckimpuls, b) für gedämpfte Schwingung

Die Fouriertransformierte  $F(\omega)$  des Rechteckimpulses wird *Spaltfunktion* genannt, da sie u.a. auch die Beugungsfigur eines optischen Spaltes beschreibt. Die Höhe des zentralen Maximums von  $F$  ist reziprok zur Lage der Nullstellen. Je kürzer der

Impuls andauert, desto flacher und breiter wird die Spaltfunktion. Umgekehrt hat  $F(\omega)$  ein scharfes hohes Maximum, wenn der Impuls lange andauert.

Ähnlich reziprok verhält sich die Fouriertransformierte  $\text{Re } F(\omega)$  der gedämpften Schwingung, die eine sog. *Lorentzkurve* darstellt. Die Kreisfrequenz  $\omega_0$  der Schwingung bestimmt die Position des Peaks. Dessen Höhe ist reziprok zur Dämpfungskonstanten  $\alpha$ , während die Halbwertsbreite proportional zu  $\alpha$  ist.

### 2.3 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Bei der experimentellen Untersuchung periodischer Signale handelt es sich in der Regel nicht um analytisch bekannte Funktionen wie die z.B. in Abb.1 gezeigten Zeitfunktionen sondern oft um analytisch unbekannte, komplexe Signale, die wie z.B. im vorliegenden Versuch mit einem geeigneten Messwertaufnehmer (Mikrofon bei Schallsignalen) und einem Computer aufgezeichnet werden. Dabei wird das zu untersuchende Signal  $f(t)$  in einem vorgegebenen festen Zeitabstand  $\Delta t$  wiederholt gemessen. Dies geschieht, indem - jeweils nach Ablauf des *Messzeitintervalls*  $\Delta t$  über eine kurze Messzeit  $\tau$  ( $\ll \Delta t$ ) gemittelt - der diskrete Funktionswert  $f_k = f(t_k = k\Delta t)$  bestimmt wird. Das Signal  $f(t)$  wird also mit der *Abtastfrequenz*  $\nu_a = 1/\Delta t$  abgetastet.

Ist das analoge (kontinuierliche) Zeitsignal  $f(t)$  innerhalb der Gesamtmesszeit  $t_m$  an  $N$  äquidistanten Stützstellen  $t_k = k\Delta t$ , ( $k = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1$ ;  $\Delta t = t_m/N$ ) bestimmt, lässt es sich näherungsweise durch ein trigonometrisches Polynom darstellen:

$$f(t_k) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_n \exp(2\pi i n t_k / t_m) \quad (8)$$

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f(t_k) \exp(-2\pi i n t_k / t_m) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Gln.(8) besagen, dass die  $N$  Stützwerte  $f_k$  der Zeitfunktion  $f(t)$  in *genau*  $N$  Fourierkoeffizienten  $c_n$  transformiert werden. Diese sind i. Allg. komplex. Die  $2N$  Werte sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Ist  $f(t)$  reell, gilt  $c_n^* = c_{-n}$ . Jedem Koeffizienten  $c_n$  (bzw.  $c_{-n}$ ) ist die Frequenz  $\nu_n = n/t_m$  zugeordnet. Die Auflösung  $\Delta \nu$  auf der Frequenzskala ist also durch die Gesamtmesszeit beschränkt:  $\Delta \nu = 1/t_m$ .

Die Gln.(8) besagen zudem, dass in der Fourierdarstellung  $c_n$  der Stützwerte  $f_k$  die

maximale Frequenz der Oberschwingungen  $v_g = (N/2 - 1)/t_m$  beschränkt ist durch die Abtastfrequenz  $v_a = 1/\Delta t = N/t_m$ . Dies kommt im sog. *Abtasttheorem* zum Ausdruck:

$$v_a > 2v_g \quad (9)$$

Es bedeutet: Um ein Zeitsignal  $f(t)$  mit maximaler Frequenz  $v_g$  im Fourierspektrum nach Abtastung durch eine diskrete Fouriertransformation *eindeutig* zu reproduzieren, darf die Frequenz  $v_g$  nicht größer sein als die halbe Abtastfrequenz  $v_a/2$  (*Nyquistfrequenz*). Oder anders gesagt: In dem der Frequenz  $v_g$  entsprechenden Zeitintervall  $1/v_g$  müssen mindestens 2 Stützwerte  $f_k$  liegen. Ist dies nicht der Fall, hat das Signal also Frequenzanteile  $v_g$  oberhalb der Nyquistfrequenz, werden diese Anteile bei der Fouriertransformation auf den *falschen* Spektralbereich  $v_f < v_a/2$  abgebildet (*Aliasing-Effekt*).

$$v_f = |v_a - v_g| \quad (10)$$

Anderenfalls, wenn  $v_g < v_a/2$ , läge mit Gl. (10)  $v_f$  oberhalb  $v_a/2$ . Dies wird hier jedoch durch die Beschränkung der DFT auf Frequenzen  $v < v_a/2$  vermieden.

## 2.4 Gekoppelte Schwingkreise

Im vorliegenden Versuch wird u.a. das Zeit- bzw. Frequenzverhalten induktiv gekoppelter elektrischer Schwingkreise untersucht. Abb. 3 zeigt schematisch die Schaltung solcher Schwingkreise, bestehend aus je einem Kondensator der Kapazität  $C_1$  und einer Spule der Induktivität  $L_1$ .

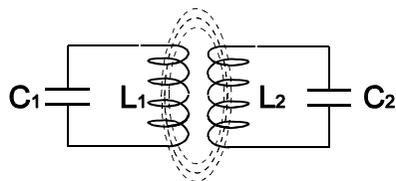


Abb. 3 Gekoppelte Schwingkreise

Die Maschenregel elektrischer Schaltungen besagt, dass die Summe der Spannungen einer Masche gleich Null ist.

Für einen einzelnen isolierten Schwingkreis folgt hieraus mit  $U_L = L \dot{I}$  sowie  $U_C = Q/C$  (s. auch Versuch C8/9: *Wechselstromwiderstände u. Reihenresonanz*) nach

zeitlicher Ableitung der Summenspannung:

$$L\ddot{I} + \frac{I}{C} = 0, \quad \ddot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11)$$

Die Lösung der Dgl. (11):  $I(t) = I_0 \sin(\omega_0 t)$  für den Strom bzw.  $U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$  für die über  $L$  und  $C$  abfallende Spannung entspricht einer harmonischen Schwingung des Schwingkreises mit der Eigen(kreis)frequenz  $\omega_0$ .

Ist der Schwingkreis 1 mit einem identischen zweiten Schwingkreis 2 über die Spulen induktiv gekoppelt, so ist in der Summe der Spannungen der Maschen jedes Schwingkreises zusätzlich die induzierte Spannung  $U_{\text{ind}} = k L \dot{I}$  infolge der zeitlichen Änderung des Stroms des jeweils anderen Schwingkreises hinzuzufügen. Die Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingkreise 1 und 2 lauten dann

$$L\ddot{I}_1 + kL\ddot{I}_2 + \frac{I_1}{C} = 0, \quad \text{bzw.} \quad L\ddot{I}_2 + kL\ddot{I}_1 + \frac{I_2}{C} = 0 \quad (12)$$

Hierbei ist  $kL$  die Gegeninduktivität der Spulen,  $k$  der Kopplungsparameter ( $0 < k < 1$ ). Die Dgln. (12) entsprechen denen zweier gekoppelter Pendel (vergl. Versuch A4: *Gekoppelte Pendel*). Sie sind - analog zum Versuch A4 - zunächst durch eine geeignete Transformation der Variablen  $I_1$  und  $I_2$  (hier in Summen bzw. Differenzen dieser Ströme) zu entkoppeln und nach deren Lösung zurück in die ursprünglichen Variablen zu transformieren. Das Ergebnis für Strom und Spannung von Schwingkreis 1 lautet:

$$I_1 = \frac{I_0}{2} [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)], \quad U_1 = \frac{LI_0}{2} [\omega_1 \cos(\omega_1 t) + \omega_2 \cos(\omega_2 t)] \quad (13)$$

$$\text{mit den Frequenzen} \quad \omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}$$

Für eine schwache Kopplung, d.h.  $k \ll 1$ , erhält man nach Umformen der Gln (13) mit  $|\omega_1 + \omega_2| \approx 2 \omega_0$ ;  $|\omega_1 - \omega_2| \approx k \omega_0$  näherungsweise:

$$I_1 = I_0 \sin(\omega_0 t) \cos\left(\frac{k}{2} \omega_0 t\right), \quad U_1 = U_0 \cos(\omega_0 t) \cos\left(\frac{k}{2} \omega_0 t\right) \quad (14)$$

Gln. (14) beschreiben eine *Schwebungsschwingung* mit der *Schwebungsfrequenz*  $\omega_s = k\omega_0$  bzw. *Schwebungszeit*  $T_s = T_0/k$ .

## 2.5 Fourieranalyse von Klängen

Akustische Signale von Musikinstrumenten und der menschlichen Stimme sind meistens nicht einfache Töne (harmonische Schallschwingungen bestimmter Frequenz) sondern stellen Überlagerungen von mehreren Tönen, sog. *Klänge* dar. Ein Klang besteht aus einem *Grundton* und dem für das betreffende Instrument charakteristischen Spektrum von *Obertönen*, wobei die *Klangfarbe* durch die Anzahl und relative Intensität der Obertöne bestimmt ist (höre z.B. die akustische Darstellung der in Abb. 1 gezeigten Zeitfunktionen). Hinzu kommt der für das Instrument und die Tonerzeugung charakteristische *Einschwingvorgang*, bei dem für kurze Zeit die Obertöne in Anzahl und Intensität variieren können, bevor der Klang zeitlich stationär wird.

Die Klangfarbe ist zudem weitgehend unabhängig von der Phasenlage der einzelnen Oberschwingungen zur Grundschwingung und zueinander. Zur Beschreibung des (stationären) Klangs mittels Fourieranalyse, Gln. (1, 2), ist es demnach meistens ausreichend, lediglich das Spektrum der Töne, d.h. die Koeffizienten  $a_n$  oder die Koeffizienten  $b_n$  bzw. das Amplitudenspektrum  $|F(\omega)|$  darzustellen.

*Geräusche* stellen im Gegensatz zu Klängen unperiodische Schwingungen mit einer Vielzahl von Frequenzen dar, die i. Allg. in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen und deren Amplituden zudem statistisch wechseln können. Treten Frequenzen in einem weiten Frequenzbereich mit ähnlicher Amplitude auf, spricht man von *Rauschen*, treten alle Frequenzen mit gleicher Amplitude auf, spricht man von *weißem Rauschen*.

## 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Untersuchen Sie die von dem Funktionsgenerator PowerCassy erzeugte Sinus-Spannung (1000 Hz) mit der Fourieranalyse. Bestimmen Sie die Peakbreite im FT-Amplitudenspektrum für verschiedene Messzeiten und Messzeitintervalle.
- 2. Aufgabe:** Zeichnen Sie den von einer Stimmgabel mit Resonanzboden erzeugten Ton mit einem Mikrofon auf. Untersuchen Sie das Zeitverhalten der gedämpften Schwingung sowie die Linienform im FT-Amplitudenspektrum.

- 3. Aufgabe:** Zeichnen Sie die von zwei Stimmgabeln mit Resonanzböden erzeugte akustische Schwebung mit dem Mikrofon auf. Bestimmen Sie aus der Schwebungsfigur und dem FT-Amplitudenspektrum die Tonfrequenzen und ihre Differenz.
- 4. Aufgabe:** Untersuchen Sie das Resonanzverhalten einer Stimmgabel mit Resonanzboden mit dem Mikrofon bei verschiedenen Geräuschen im Raum.
- 5. Aufgabe:** Zeichnen Sie die mit dem Funktionsgenerator PowerCassy erzeugten Sinus-, Dreieck-, und Rechteck-Spannungen der Frequenz 300 Hz auf. Vergleichen Sie die aus der FT ermittelten Werte der Fourierkoeffizienten mit den aus den Funktionen berechneten Werten.
- 6. Aufgabe:** Untersuchen Sie das Zeit- und Frequenzverhalten der Spannung eines LC-Schwingkreises, der induktiv an einen LC-Schwingkreis nahezu gleicher Eigenfrequenz gekoppelt ist.
- 7. Aufgabe: (freiwillig)** Zeichnen Sie die Töne bzw. Klänge der menschlichen Stimme sowie verschiedener Instrumente auf. Untersuchen Sie u.a. die Abhängigkeit der Klangspektren vom Anschlag mit Metall, Holz oder Gummi.

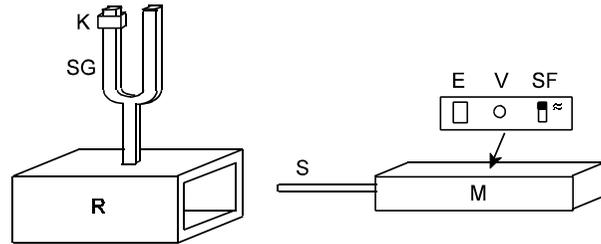
## 4. Versuchsanordnung

Der Versuchsaufbau ist für jeden Aufgabenteil spezifisch. Zur Tonerzeugung dient u. a. der programmierbare Funktionsgenerator *PowerCassy*, dessen Parameter mit dem im Versuch benutzten Mess- u. Auswertprogramm *CassyLab* eingestellt werden. Das Programm wird in ähnlichem Umfang bereits in den Versuchen A5 *Pohlsches Drehpendel* bzw. A6 *Schallgeschwindigkeit in Gasen und Festkörpern* benutzt. Die wesentlichen Bedienelemente werden deshalb hier als bekannt vorausgesetzt.

Die Einstellungen des PowerCassy-Funktionsgenerators sind nach Drücken des Werkzeugsymbols des (vom Desktop geladenen) Cassy-Programms im Ordner *Cassy* durch Drücken auf das rechte Modul vorzunehmen.

Entsprechend sind die Einstellungen des (z.B.) vom Mikrofon gespeisten Signaleingangs für das Messwertaufnahme-Interface *SensorCassy* durch Drücken auf das linke Kästchen vorzunehmen.

Abb. 4 zeigt schematisch eine für die Tonerzeugung benutzte Stimmgabel auf einem Resonanzboden sowie das benutzte Mikrofon zu Signalaufzeichnung. Auf einem an einer Seite offenen Resonanz-Holzkasten R ist eine Stimmgabel SG der Eigenfrequenz 440 Hz montiert. Die Frequenz kann geringfügig durch eine aufgeschobene in der Höhe verstellbare Klemme K variiert werden. Ein Mikrofon



**Abb. 4:** Stimmgabel SG mit Klemme K und Resonanzkasten R neben Mikrofon M: mit Sonde S, Einschaltknopf E, Verstärkungsregler V und Signalformeinsteiler SF

M, dessen Sensor sich in der Spitze des Stabes S befindet, registriert die an der Kastenöffnung entstehenden Schalldruckschwankungen der Luft. (s. Versuch A6: *Schallgeschwindigkeit in Gasen und Festkörpern*). Das Mikrofon hat ein Schaltfeld mit einem Einschalttaster E (der gelegentlich nach längerer Pause zu drücken ist) sowie einen Verstärkungsregler V, welcher dem jeweiligen Versuch gegebenenfalls anzupassen ist. Mitunter genügt es, den Abstand des Mikrofons zur Schallquelle zu verändern. Die Einstellung SF (Signalform) des Mikrofons ist im vorliegenden Versuch auf das Sinussymbol  $\approx$  zu stellen. Das Mikrofon kann mit vertikal stehendem oder horizontal liegendem Stativstab in den Stativfuß eingespannt werden.

## 5. Versuchsdurchführung und Auswertung

### 5.1 1. Aufgabe

Es ist die Breite des Peaks im FT-Amplitudenspektrum einer 1000 Hz-Sinusspannung für verschiedene Messzeiten und Messzeitintervalle zu bestimmen. Laden Sie vom Desktop das Messprogramm *CassyLab*. Es erscheint das Fenster *Einstellungen*. Belegen Sie im Ordner *Allgemein Com1* mit *Cassy*. Laden Sie danach aus dem Ordner *Fourieranalyse* vom Desktop die Messdatei *A1*.

In dieser Datei sollten alle (Start)Parameter für diesen Versuch gespeichert sein. Drücken Sie gegebenenfalls zur Überprüfung das Werkzeugsymbol in der Kopfzeile des Programms. Es erscheint das Fenster *Einstellungen*. Im Ordner *Cassy* ist links das Modul *SensorCassy* zur Messwertaufnahme, rechts daneben das Modul *PowerCassy* als programmierbare Spannungs/Stromquelle sichtbar. Nach Mausdruck auf dieses Modul erscheint das Fenster *Einstellungen Funktionsgenerator*. Folgende Einstellungen sollten aktiviert sein:

Spannungsquelle (U eingestellt, I gem.) -1 V...1 V  
nur während der Messung aktiv  
Signalform: Sinus/1000Hz/0,5Vp/0V= /50%  
Messwertaufnahme: Momentanwerte  
Nullpunkt: mittig

Nach Drücken des Knopfes *Messparameter anzeigen* auf dem Fenster *Einstellungen* sollten folgende Messparameter angezeigt werden:

automatische Aufnahme Intervall  $10\mu\text{s} / * 16000 / =$  Messzeit 160 ms  
neue Messreihe anhängen

Schieben Sie das Messparameterfenster in die linke untere Ecke des Bildschirms, schließen Sie das Fenster *Einstellungen* und wählen Sie die Tabelle *Standard*. Schließen Sie den Lautsprecher an den Ausgang U/I des *PowerCassy* an. Nach Drücken des Stoppuhrsymbols in der Kopfzeile sollte während der nachfolgenden Messzeit (160ms) der Sinuston zu hören und für wesentlich längere Zeit die Signalaufzeichnung auf dem Bildschirm zu sehen sein. Umschalten nach Ablauf der Aufzeichnung auf die Tabelle *Frequenzspektrum* bewirkt die Anzeige des Fourier-Diagramms. Es sollte ein schmaler Peak bei 1000 Hz sichtbar sein.

Halbieren Sie die Anzahl der Messwerte auf 8000 und starten Sie erneut die Messung. Führen sie weitere Messungen mit sukzessiv halbierten Messwertzahlen bis hinab zu 250 durch.

Wählen Sie danach erneut die Tabelle *Frequenzspektrum*. Das Fourier-Diagramm sollte eine Reihe um 1000 Hz zentrierter Peaks mit den Messreihen entsprechender Farbe aufweisen.

Speichern Sie zunächst Ihre Daten mit dem Titel *A1a....* in einem Unterordner mit Namen Ihrer *Gruppennummer* ab. Es wird empfohlen, die Bestimmung der Peakbreiten in zwei Schritten vorzunehmen. Wählen Sie einen Frequenzbereich von 800 bis 1200 Hz. Durch Drücken von *Alt D* und Ziehen der gedrückten Maus über die der Halbwertsbreite entsprechende Strecke wird eine Weglänge markiert, durch Drücken von *Alt T* wird die Länge als Textmarke an die Strecke gesetzt.

Durch Drücken von *Alt Rück* (←) kann die Auswertung (sukzessive rückwärts) gelöscht werden. (S. auch Fenster nach rechtem Mausklick).

Führen Sie die Auswertung für die schmalen Peaks durch, speichern Sie die Datei mit neuem Titel z.B. *A1b..* im gleichen Ordner, laden Sie die zuvor gespeicherte Datei *A1a...* erneut, bestimmen Sie analog die Halbwertsbreiten der breiten Peaks und speichern Sie danach die Datei erneut.

Im Anschluss ist eine neue Messreihe mit auf 50 µs geändertem Messintervall für die Messwertzahlen 16000/./.../250 durchzuführen, auszuwerten und unter *A1c...*, *A1d...* zu speichern.

In der weiteren Auswertung sind in einem Diagramm die Halbwertsbreiten aller Peaks über der jeweiligen reziproken Messzeit  $1/t_m$  aufzutragen und durch eine Ausgleichsgerade mit Fehlerabschätzung darzustellen und zu diskutieren.

## 5.2 2. Aufgabe

Laden Sie die Messdatei *A2*. Das Mikrofon ist an das untere Buchsenpaar  $U_{B1}$  des Cassy-Interface anzuschließen und vor den Resonanzkasten mit horizontaler Stativstange in den Stativfuß einzuspannen. Die Kunststoffklemme ist etwa mittig auf der Stimmgabel festzustellen. In der Cassy-Messeinstellung (Drücken auf *Werkzeugsymbol/Cassy/U<sub>B1</sub>*) sollte der Signalspannungseingang  $U_{B1}$  auf den Bereich  $\pm 3$  V /Momentanwerte, in der Einstellung *Messparameter* sollten das Messintervall auf 200 µs, die Anzahl der Messwerte auf 16000 und die Messzeit auf 3200 ms eingestellt sein.

Die Tonschwingung ist durch Anschlag der Stimmgabel mit dem Gummihammer zu erzeugen und die Messung sofort zu starten. Das Signal  $U_{B1}$  sollte zu Beginn der Aufzeichnung (Standard) eine Amplitude von ca. 1 bis 2 V haben und nach 2 bis 3 s auf den Rauschwert von ca. 0,1 bis 0,2 V abgeklungen sein. Gegebenfalls ist der Abstand Stimmgabel-Mikrofon bzw. die Einstellung V am Mikrofon zu ändern. Das berechnete Fourierspektrum sollte im Frequenzintervall 420 - 450 Hz einen deutlichen Peak aufweisen. Speichern Sie die Messdatei in Ihrem Unterordner mit Titel *A2.....* ab.

Es ist eine zweifache Auswertung durchzuführen. An die zeitabhängige Signalspannung ist nach Drücken der rechten Maustaste und Wahl *Anpassung durchführen, Einhüllende  $e^{-x}$*  durch Ziehen der gedrückten Maus über etwa die linke Hälfte des Graphen die Funktion  $y(t) = \pm Ae^{-\nu B} + C$  zu zeichnen und mit dem entsprechenden Textlabel (*Alt T*) zu versehen. Die zu ermittelnde Größe B hat den reziproken Wert der Dämpfungskonstanten  $\alpha$  (s. Gl. (7b) und Abb. 2b). Speichern Sie die Anpassung in der Datei *A2a...* ab

Entsprechend der Abb.2 soll das Fourierspektrum durch eine Lorentzkurve angepasst werden. Schalten Sie dazu auf die Anzeige *Frequenzspektrum* und setzen Sie zunächst nach Tastendruck *Alt S* mit der Maus eine vertikale Linie mittig auf den Peak und mit *Alt T* die Peakfrequenz daneben. Wählen Sie dann *Anpassung durchführen, freie Anpassung (Alt F)*. Die anzupassende Funktion hat die Form:

$$A/(B+(x-C)^2)$$

nun mit anderen Konstanten A, B, C als oben in der Zeitfunktion! Die Startkonstante A/B sollte ungefähr der Peakhöhe entsprechen (A ca. 0,6; B ca. 0,2; C = Peakfrequenz). Starten Sie die Anpassung durch Ziehen der gedrückten Maus symmetrisch von links nach rechts (ca. 5 Hz Breite) über den Peak und Loslassen der Maus. Die Lorentzkurve sollte besonders im Fußbereich gut mit dem Peak übereinstimmen. Wiederholen Sie gegebenenfalls die Anpassung nach *Alt Rück* (Löschen) mit *Alt F*. Wählen Sie z.B. die Konstante B etwas kleiner und setzen Sie diese konstant. Bestimmen Sie (nach befriedigendem Ergebnis der Anpassung der Lorentzkurve) die Halbwertsbreite  $\delta\nu$  der angepassten Lorentzkurve mit *Alt D* und speichern Sie die Datei erneut unter *A2a...* ab.

In der weiteren Auswertung ist die Dämpfungskonstante  $\alpha$  gemäß Gl. (7b) und Abb. 2b aus der angepassten Lorentzkurve zu bestimmen. Aus der Halbwertsbreite  $\delta\nu$  folgt unmittelbar:

$$2\alpha = \delta\omega = 2\pi\delta\nu; \quad \alpha = \pi\delta\nu$$

Aus der Umformung der Funktion  $F(\omega)$  in  $F(\nu)$  folgt:

$$\alpha = 2\pi B^{1/2}$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse für  $\alpha$ . Schätzen Sie aus dem Ergebnis der 1. Aufgabe ab, welche Breite der Peak aufgrund der Messzeit haben sollte und welche Auflösung  $\Delta\nu$  aufgrund des Messintervalls zu erwarten ist. Diskutieren Sie Abweichungen der Anpassung von der "gemessenen" Kurve.

## 5.3 3. Aufgabe

Es sind zwei Resonanzkästen mit Stimmgabeln leicht unterschiedlicher Eigenfrequenz nebeneinander gegenüber dem Mikrofon aufzustellen. Dazu sind die beiden Klemmen der Stimmgabeln in leicht unterschiedlicher Höhe anzubringen (z. B. ca. 8,5 cm bzw. 10,5 cm über der Resonanzbodenoberseite). Das Mikrofon ist wie in der zweiten Aufgabe auf Höhe der Resonanzkästen montiert. Laden Sie die Messdatei *A3*. Die Messparameter für die Signalspannung

sind wie zuvor  $200 \mu\text{s}$  ; \* 16000 ; = 3200 ms.

Üben Sie vor der Messung den Anschlag der beiden Stimmgabeln mit dem Gummihammer. Die Gabeln sollten möglichst gleich stark schwingen und die Schwebung gut hörbar sein. Starten Sie die Messung unmittelbar nach geglücktem Anschlag der Stimmgabeln.

Die Signalspannung sollte eine Schwebungsfigur mit deutlich 3 bis 4 Bäuchen und Knoten zeigen. (Es macht nichts, wenn die Signalspannungsamplitude an den Knoten nicht ganz verschwindet). Das Frequenzspektrum sollte zwei dicht nebeneinander liegende Peaks entsprechend der leicht unterschiedlichen Frequenzen zeigen.

Wiederholen Sie die Messung gegebenenfalls nach Löschen der Messdatei durch rechten Mausklick auf die Tabelle und *M*. Bestimmen Sie in der Auswertung der gelungenen Messdatei die Lagen der Knoten auf der Zeitachse der Signalspannung. Markieren Sie diese durch vertikale Linien *Alt S*. Bestimmen Sie anschließend die Abstände der Knoten (*Alt D*, *Alt T*) sowie ihren Mittelwert, die Schwebungszeit  $T_s$ . Bestimmen Sie im Frequenzspektrum analog die Lagen der Peakmitten sowie die Frequenzen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  sowie ihre Differenz  $\Delta\nu$ . Speichern Sie die Messdatei in Ihrem Ordner ab.

Leiten Sie in der weiteren Auswertung aus der Umformung der additiv überlagerten Schwingungsfunktionen  $\sin(2\pi\nu_1 t)$  und  $\sin(2\pi\nu_2 t)$  der Stimmgabeln in eine sin-cos-Produktfunktion den Zusammenhang zwischen  $\Delta\nu$  und  $T_s$  her und vergleichen Sie diesen mit Ihrem Messergebnis. (S. auch Gl. (14) u. 6. Aufgabe).

#### 5.4 4. Aufgabe

Ziel dieses Versuchs ist es, das „Mitklingen“ des bei der Eigenfrequenz  $\nu_0$  (hier ca. 440 Hz) besonders leicht erregbaren schwingfähigen Systems *Stimmgabel und Resonanzboden* im Geräuschspektrum des Hintergrundes, z.B. dem Geräusch eines PC-Lüfters sicher nachzuweisen. Damit die resonante Schwingung angeregt wird, muss das Geräusch im Frequenzbereich der Resonanz einen merklichen Geräuschpegel erzeugen. Aufgrund des (mehr oder weniger) zufälligen Charakters des Geräuschs weist auch die „Resonanzantwort“ zufällige Schwankungen auf. Um das typische Verhalten des Resonators zu bestimmen, ist daher die mehrfach wiederholte Messung der Resonanzantwort unbedingt erforderlich.

Laden Sie die Messdatei *A4*. Die Messparameter für die Signalspannung sind:

Intervall  $10 \mu\text{s}$  ; \* 16000 ; = 160 ms Messzeit;  
automatische Aufnahme; neue Messreihe anhängen

Das Mikrofon ist wie zuvor montiert und auf maximale Empfindlichkeit eingestellt zunächst frei ohne Resonanzkasten aufzustellen, um den Geräuschpegel des Hintergrundes (z.B. PC-Lüfter) aufzunehmen.

Starten Sie die Messung des Hintergrundgeräuschs und wiederholen Sie diese mindestens zweimal, um einigermaßen den statistischen Charakter des Frequenzspektrums - vor allem im interessanten Frequenzbereich des Resonators - zu untersuchen. Speichern Sie diese Messungen zum späteren Vergleich mit den Resonanzdaten in einer gesonderten Datei *A4...* in Ihrem Ordner ab.

Führen Sie nun innerhalb derselben Messdatei die Messungen mit dem Resonator fort. Dazu wird der Resonanzkasten soweit über die Sondenspitze des Mikrofons geschoben, dass diese sich etwa mittig zwischen den Seitenwänden des Resonatorkastens ca. 2 cm vor dessen gegenüberliegender Innenwand befindet.

Starten Sie die Messung erneut und stellen Sie fest, inwieweit die Resonanzantwort vor allem im Frequenzbereich zwischen 400 und 500 Hz über dem Hintergrundpegel liegt. Verändern Sie bei Signalspannungen wesentlich unter 0,3 V etwas die Position des Mikrofons.

Schreiben Sie gegebenenfalls Ihren Kommentar mit *Alt T* unter Angabe der Farbe des Graphen direkt auf. Wiederholen Sie diese Messung so oft (mindestens dreimal), bis Sie ausschließen können, dass zufällige Schwankungen der Signalspannung des Mikrofons die wesentlichen Aussagen bezüglich der Beurteilung des Resonanzverhaltens beeinflussen.

Beschreiben Sie in der Versuchsauswertung Ihre Beobachtungen.

#### 5.5 5. Aufgabe

In diesem Versuchsteil soll nachgewiesen werden, wie sich die von einem Funktionsgenerator (hier PowerCassy) generierte Dreieck- und Rechteck-Spannung aus Fourier-Reihen mit entsprechenden Fourier-Koeffizienten der Oberschwingungen zum 300 Hz-Sinus-Grundsignal zusammensetzt.

Schließen Sie zur akustischen Kontrolle den Lautsprecher an den Ausgang  $U_2$  des PowerCassy Funktionsgenerators an. Laden Sie die Datei *A5*. Die Start-Einstellungen des Funktionsgenerators sind ähnlich wie im Versuch Aufgabe 1:

Signalform: Sinus 300 Hz/0,5Vp/0V=50%

Messparameter: automatische Aufnahme/Intervall  $100 \mu\text{s}$  / \* 16000 / = 1600 ms

Starten Sie die Messung mit dem Sinussignal und speichern Sie das Messergebnis mit dem Titel *A5.1...* in Ihrem Unterordner ab.

Verändern Sie danach die Einstellung des Funktionsgenerators auf *Dreieck sym.*, löschen Sie die letzte Messreihe (auf Tabelle *Mausklick rechts, M*) und starten Sie die Messung erneut. Speichern Sie das Ergebnis mit dem Titel A5.2 .. ab.

Stellen Sie am Schluss die Einstellung auf *Rechteck sym.*, messen Sie nach Löschen der Tabelle erneut und speichern Sie das Ergebnis mit dem Titel A5.3.. ab.

In der Auswertung ist zu zeigen, dass die Beträge  $|b_n|$  der Fourier-Koeffizienten für die Rechteck- bzw. Dreieck-Funktion proportional  $1/n$  bzw.  $1/n^2$  abfallen (s. Abb.1). Bestimmen Sie daher die Werte  $b_n$  aus den Frequenzspektren durch Setzen des Cursors auf die jeweilige Peakspitze und Ablesen des in der Tabelle eingerahmten Wertes.

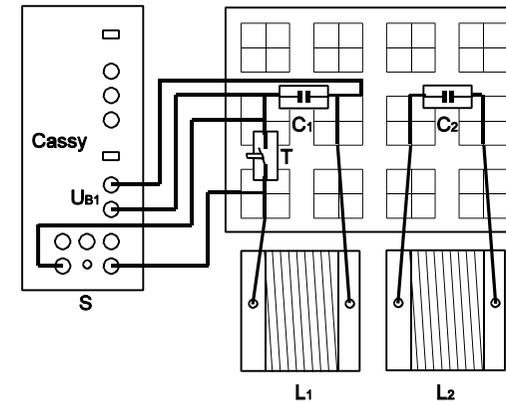
Tragen Sie in der weiteren Auswertung für die Dreieck-Funktion die Werte  $b_n * n^2$ , für die Rechteck-Funktion  $b_n * n$  über  $n$  auf.

Anmerkung: Bei dem Frequenzspektrum für die Rechteck-Funktion ist deutlich der Aliasing-Effekt, Gl. (10) zu erkennen. die Grenzfrequenz  $v_g = v_a/2 = 1/2 * \Delta t$  ist 5000 Hz. Der Koeffizient  $b_{15}$  liegt bei 4500 Hz, der nächste,  $b_{17}$ , bei 5100 Hz, also bereits 100 Hz oberhalb der Grenzfrequenz. Er wird daher bez. seiner Frequenzlage bei 5000 Hz gespiegelt, also bei 4900 Hz abgebildet. Sie können in dieser Messung auch Koeffizienten für Frequenzen oberhalb  $v_g$  zur Auswertung benutzen, da sie durch ihre Lage auf der Frequenzachse und Größe identifizierbar sind.

## 5.6 6. Aufgabe

In diesem Versuch wird das Frequenzspektrum gekoppelter elektrischer Schwingkreise mit dem eines ungekoppelten Schwingkreises verglichen. Abb. 5 zeigt den Versuchsaufbau. Der (aktive) Schwingkreis  $L_1 = 9 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$  ist an das Sensorcassy ( $U_{B1}$ ) angeschlossen. Es wird die Kondensator- bzw. Spulenspannung gemessen. Der Stromquellenausgang S des Cassy lädt den Kondensator  $C_1$  zunächst auf. Durch Drücken des Tasters T wird (über eine Triggerschaltung der Signalspannung,  $U_{B1} = 0 \text{ V}$ ) die Schwingung gestartet und dabei Stromquelle kurzgeschlossen. Der passive Schwingkreis  $L_2 = 9 \text{ mH}$ ,  $C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$  ist je nach Entfernung und relativer Ausrichtung der Spulen mehr oder weniger induktiv an den aktiven Schwingkreis gekoppelt. (Vergl. Versuch A4 *Gekoppelte Pendel*)

Bauen sie die Schaltung gem. Abb. 5 auf. Stellen Sie den Spannungsregler des Stromquellenausgangs S des Cassy auf ca. 9 V. Laden Sie die Datei A6.



**Abb. 5:** Schaltskizze gekoppelte Schwingkreise

Die Messparameter sind:

Automatische Aufnahme; Trigger :  $U_{B1}$ , 0V, steigend, neue Messreihe anhängen  
Messintervall  $10 \text{ }\mu\text{s} / * 5000 / = 50 \text{ ms}$  Messzeit

Stellen für die erste Messung die Spulen koaxial ohne Abstand direkt aneinander, drücken Sie das Stoppuhrsymbol und darauf die Taste T. In der Standardeinstellung wird eine gedämpfte Schwingung mit überlagerter Schwebung aufgezeichnet. Zur Auswertung sind an den Knotenstellen (bzw. Minima der Amplitudenschwingung) mit *Alt S* senkrechte Linien zu setzen und ihre Positionen mittels *Alt T* mit dem Zeitwert zu versehen.

Das Frequenzspektrum hat zwei nebeneinander liegende Peaks. Schränken Sie die Frequenzachse zur Verbreiterung der Peaks entsprechend ein und markieren Sie die Maxima entweder mit *Alt S*, *Alt T* oder mit der Auswertung *Peakschwerpunkt* (Rechter Mausklick *E*, *E* und nachfolgend Maus über Messkurve ziehen).

Stellen Sie danach die Spulen soweit auseinander, wie es die Kabel erlauben, und drehen sie die Spulenachsen so, dass sie senkrecht zueinander stehen. Wiederholen Sie die Messung. Es sollte nun die gleiche gedämpfte Schwingung jedoch ohne Schwebung aufgezeichnet werden. Im Frequenzspektrum wird der Peak der ungekoppelten Schwingung etwa mittig zwischen den Schwebungspeaks aufgezeichnet. Bestimmen Sie die Peakposition wie zuvor und speichern Sie die Datei unter *A6a....* in Ihrem Ordner ab.

Führen Sie nach erneutem Laden von *A6* eine weitere Messung bei einem Abstand

der koaxialen Spulen von ca. 3 cm durch, werten Sie diese wie zuvor aus und speichern Sie die Ergebnisse unter *A6b...*

In der weiteren Auswertung ist jeweils für den Spulenabstand 0 und 3 cm aus den Lagen der Schwingungsknoten die mittlere Schwebungszeit  $T_S$  zu bestimmen. Aus den Peakfrequenzen der Spektren ist mit Gl. (13),  $(\omega_i(k))$ , der mittlere Kopplungsparameter  $k$  und mit Gl. (14) daraus die Schwebungszeit  $T_S$  zu berechnen und mit der aus dem Zeitverhalten bestimmten Zeit  $T_S$  vergleichen.

### 5.7 7. Aufgabe

In dieser Aufgabe besteht die Möglichkeit, Töne und Klänge Ihrer Wahl mit dem Mikrofon wie in der 2. bis 4. Aufgabe aufzuzeichnen und anhand der Fourierspektren zu charakterisieren. Laden Sie dazu die Datei *A7* und speichern Sie Ihre Messergebnisse mit Kommentar (*Alt T*) unter *A7a...*, *A7b...*, in Ihrem Ordner ab.

Drucken Sie abschließend Ihre Messdateien für das Protokoll aus.

### 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche Eigenschaften muss eine Zeitfunktion  $f(t)$  besitzen, um durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden zu können?
- 2) Welche Form hat die Fourier-Reihe einer Zeitfunktion? Wodurch sind die Summanden bzw. Fourierkoeffizienten der Reihe festgelegt?
- 3) Welche Form hat die Fouriertransformierte einer nichtperiodischen Zeitfunktion?
- 4) Was versteht man unter dem *Amplitudenspektrum* einer Zeitfunktion  $f(t)$ ?
- 5) Welche Form hat das Amplitudenspektrum einer gedämpften Schwingung?
- 6) Was versteht man unter *diskreter Fouriertransformation DFT* ?
- 7) Von welcher Größe ist die Frequenzauflösung, von welcher die maximale Frequenz des Amplitudenspektrums einer DFT abhängig?
- 8) Was besagt das sog. *Abtasttheorem*?
- 9) Was versteht man unter einem *Ton*, einem *Klang*, einem *Geräusch*, was unter *Rauschen*?
- 10) Welche Form haben die Dgln. induktiv gekoppelter Schwingkreise?

### Versuch C 11: Kennlinien von HL-Diode und Transistor

- 1. Literatur:** Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd.II  
 W. Walcher, Praktikum der Physik  
 W. Westphal, Physikalisches Praktikum  
 Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik  
 Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. 2  
 Unger/Schultz, Elektronische Bauelemente und Netzwerke, Bd. 1

**Stichworte:** Halbleiter, Eigen- u. Störstellenleitung, p- und n-Dotierung, pn-Übergang, Diffusion, Raumladung, Rekombination, pnp- und npn-Transistor, Emitter- und Basis-Schaltung, Kennlinien

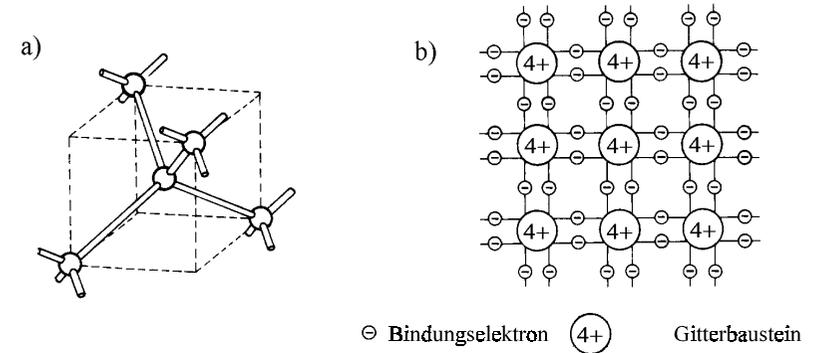
### 2. Grundlagen

#### 2.1 Elektrische Leitung in Halbleitern

##### 2.1.1 Eigenleitung

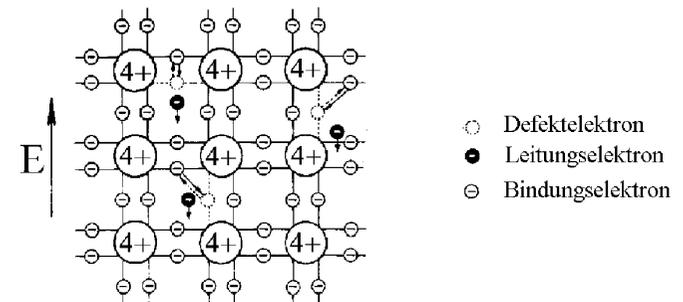
Halbleiter lassen sich - wie ihr Name bereits andeutet - bezüglich ihrer elektr. Leitfähigkeit zwischen Isolatoren und Metallen einordnen. Zur Veranschaulichung der Leitungsmechanismen betrachten wir ihren Kristallbau. Technisch wichtige Halbleiter wie Silizium (Si), Germanium (Ge) oder Galliumarsenid (GaAs) kristallisieren im Diamant- bzw. Zinksulfidgitter, in dem jedes Atom von vier Nachbarn umgeben ist. Die Bindung zwischen zwei benachbarten Atomen erfolgt durch jeweils ein Elektronenpaar. Abb. 1a zeigt die Elementarzelle eines Diamantgitters, Abb. 1b ein ebenes Modell der Bindungen. Alle vier Valenzelektronen (d.h. Elektronen auf der äußeren Schale) eines Si-Atoms werden zur Bindung benötigt. Bei der absoluten Temperatur  $T = 0$  ist der Kristall ein Isolator, weil keine frei beweglichen Ladungen vorhanden sind.

Mit steigender Temperatur können einzelne Elektronen aufgrund ihrer thermischen Energie die Bindungen verlassen und durch den Kristall wandern. Sie liefern einen Beitrag zur Leitfähigkeit und werden deshalb Leitungselektronen genannt. Bei Anlegen eines äußeren elektr. Feldes  $E$  werden sie sich vorzugsweise entgegen der Feldrichtung bewegen (Ladung  $-e$ ) und damit einen Strom tragen. Zum anderen bleibt an jeder Stelle, an der ein Elektron eine Bindung verlassen hat, eine Lücke, in die ein benachbartes gebundenes Elektron ohne wesentlichen



**Abb.1:** a) Gitterstruktur, b) ebenes Bindungsmodell eines Si- oder Ge-Kristalls bei  $T = 0$

Energieaufwand springen kann, da dies den Übergang in einen energetisch gleichwertigen Bindungszustand darstellt. Das Elektron hinterlässt damit eine Bindungslücke an anderer Stelle. Bei Anlegen eines Feldes werden sich die Lücken vorzugsweise in Feldrichtung (wie Teilchen mit Ladung  $+e$ ) bewegen und ebenfalls zur Leitfähigkeit beitragen. Man nennt die Bindungslücken *Defektelektronen* oder *Löcher*. Abb. 2 veranschaulicht den Mechanismus dieser *Eigenleitung* oder *intrinsischen* Leitung eines Halbleiters.



**Abb.2:** Anschauliches Modell der Eigenleitung

Leitungselektronen und Defektelektronen haben durch ihren Entstehungsmechanismus im reinen Halbleiter die gleiche Anzahldichte  $n_i$ , welche im wesentlichen exponentiell von der Temperatur  $T$  abhängt:

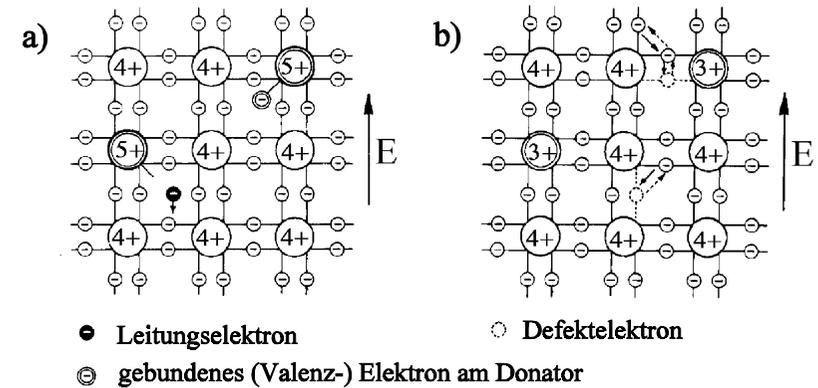
$$n_i \sim \exp\left(-\frac{\Delta W}{2k_B T}\right) \quad (1)$$

Die Exponentialfunktion (der sog. Boltzmannfaktor) ist hierbei ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Valenzelektron in einem Halbleiter der Temperatur T genügend thermische Energie besitzt um den Bindungszustand der Energie  $\Delta W$  aufzubrechen.

Bei Raumtemperatur (300 K) beträgt z.B. für reines Ge:  $n_i \approx 2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ . Mit steigender Temperatur erhöht sich diese Anzahl dichte beträchtlich (ca.  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$  bei 320 K) und damit auch die Leitfähigkeit des Ge aufgrund der Eigenleitung. Es erhöht sich aber auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron durch thermische Stöße im Kristall soviel Energie verliert, dass es von einem Loch eingefangen wird. Man nennt diesen Vorgang die *Rekombination* eines Elektron-Loch-Paares. Im thermodynamischen Gleichgewicht wird jedoch die gleiche Anzahl von Elektron-Loch-Paaren erzeugt (generiert) wie durch Rekombination verschwindet.

### 2.1.2 Störstellenleitung

Werden in einen Halbleiter wie Si oder Ge geringe Mengen drei- oder fünfwertiger Fremdatome wie z.B. Bor oder Antimon eingebaut - man nennt dies Dotierung-, so sind diese Fremdatome auf einzelne Gitterplätze verteilt. Aufgrund ihrer fehlenden oder überschüssigen Valenz zu den Si- bzw. Ge-Nachbaratomen befindet sich an der Stelle eines Fremdatoms je ein Defekt- oder ein Valenzelektron, das im Vergleich zu den Valenzelektronen des reinen Halbleiters nur wenig an das Fremdatom gebunden ist. Bei schon relativ tiefer Temperatur können deshalb diese Löcher oder Elektronen die Fremdatome verlassen und einen wesentlichen Beitrag zur Leitfähigkeit liefern. Man nennt dies *Störstellenleitung* oder *extrinsische* Leitung. Abb. 3 veranschaulicht diesen Leitungsmechanismus. Die drei- oder fünfwertigen Fremdatome, die leicht ein Elektron aufnehmen bzw. abgeben können, werden Akzeptoren bzw. Donatoren genannt. Da diese zwar leicht ionisierbar aber selbst nicht beweglich sind, tragen je nach Dotierung im wesentlichen nur die von den Fremdatomen abgelösten Ladungsträger zum Strom bei. Bei einer Dotierung mit überwiegend Akzeptoren liegt p-Leitung, bei einer mit überwiegend Donatoren n-Leitung vor. Diese positiven oder negativen beweglichen Ladungsträger werden Majoritätsträger, die jeweils andere Ladungsorte Minoritätsträger genannt. Das Produkt der Konzentrationen beider Ladungsträgersorten  $n \cdot p$  ist jedoch unabhängig von der Dotierung und nur von den intrinsischen Eigenschaften des Halbleiters abhängig:



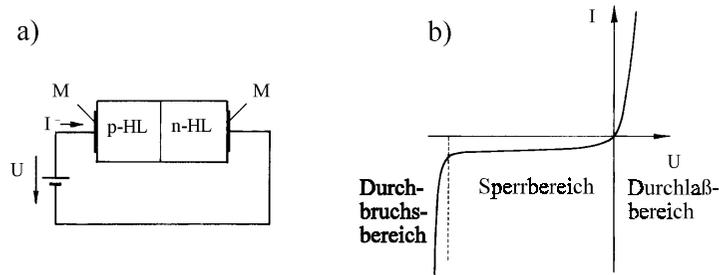
**Abb.3:** Modell der Störstellenleitung: a) Elektronenleitung (n-Leitung), b) Löcherleitung (p-Leitung)

$$np = n_i^2 \sim \exp\left(-\frac{\Delta W}{k_B T}\right) \quad (2)$$

Bei einer üblichen Dotierung von z.B. Ge mit einem Sb-Atom auf ca.  $10^6$  Ge-Atome sind bei Raumtemperatur praktisch alle Sb-Donatoren ionisiert. Die Konzentration der Leitungselektronen als Majoritätsträger ist  $n = n_{Sb} \approx 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ , also beträchtlich größer als die Konzentration  $n_i$  der Elektron-Lochpaare im reinen Ge-Kristall (s.o.). Die Konzentration der Löcher als Minoritätsträger ist mit Gleichung (2)  $p \approx 4 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ .

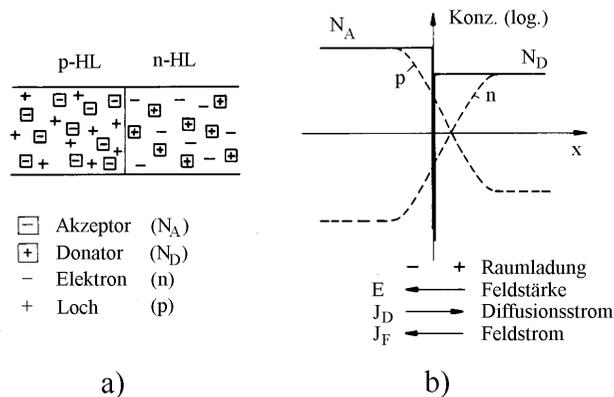
### 2.2 pn-Übergang

Ein pn-Übergang eines Halbleiters entsteht, wenn in seinem Inneren zwei homogen dotierte Bereiche, ein p-leitender und ein n-leitender aneinandergrenzen. Untersucht man den elektr. Stromfluss durch solch einen Übergang, so stellt man fest, dass für nicht zu große Spannungen ein wesentlicher Strom nur in einer Richtung fließen kann (s. Abb. 4). Der pn-Übergang wirkt als Gleichrichter. Das elektronische Bauelement mit einem pn-Übergang wird - in Analogie zur Gleichrichterwirkung einer Vakuum-Diode - *Halbleiter-Diode* oder kurz *Diode* genannt.



**Abb.4:** a) Halbleiter-Diode schematisch (M: Metallkontakte)  
b) Strom-Spannungs-Kennlinie des pn-Übergangs

Zur Erläuterung der Gleichrichterwirkung eines pn-Übergangs wird das Gleichgewicht verschiedener elektr. Ströme zwischen p- und n-leitendem Gebiet betrachtet (s. Abb. 5).



**Abb.5:** Zur Sperrschichtausbildung am pn-Übergang:  
a) anschauliches Modell, b) Konzentrationsverlauf

Ein abruptes Konzentrationsgefälle der beweglichen Löcher und Elektronen an der Grenzschicht zwischen p- und n-Halbleiter ist thermodynamisch instabil: Löcher diffundieren bei ihrer thermischen Bewegung vorzugsweise vom p- in das n-Gebiet, um das Konzentrationsgefälle abzubauen; Elektronen diffundieren entsprechend umgekehrt vom n- in das p-Gebiet. Mit dieser Diffusion ist ein

elektr. Strom \$j\_D\$ verknüpft. Die in der Umgebung der Dotierungsgrenze ortsfesten Ladungen der Akzeptoren und Donatoren können dadurch nicht mehr kompensiert werden. Sie bilden eine Raumladung, die ein elektr. Feld \$E\$ erzeugt. Es resultiert ein Feldstrom \$j\_F\$ der beweglichen Ladungsträger, welcher im Gleichgewicht des pn-Übergangs (ohne angelegte äußere Spannung) gerade den mit der Diffusion verknüpften Strom \$j\_D\$ kompensiert.

Bei diesem Gleichgewicht zwischen Diffusions- und Feldstrom müssen zwei Teilströme betrachtet werden, die für den Kennlinienverlauf einer Diode wesentlich sind: Eine geringe Anzahl der Löcher, die aus dem p-Gebiet in das n-Gebiet diffundieren, rekombiniert dort mit Elektronen. Umgekehrt rekombinieren einige Elektronen, die aus dem n- in das p-Gebiet diffundieren, dort mit Löchern. Dieser Teil des Diffusionsstroms, der sog. *Rekombinationsstrom* \$j\_R\$ muss durch einen Teil des Feldstroms, den sog. *Generationsstrom* \$j\_G\$ thermisch erzeugter Elektron-Lochpaare ausgeglichen werden. Anderenfalls würden sich Ladungen an einer Seite des pn-Übergangs anhäufen.

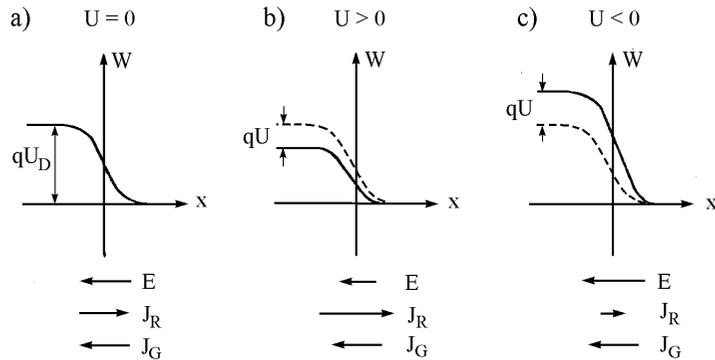
Betrachtet man die Größe dieser Ströme in Abhängigkeit von den für sie notwendigen thermischen Energien der Ladungsträger, so stellt man fest, dass die Löcher bzw. Elektronen des Rekombinationsstromes bei der Diffusion durch die Grenzschicht ein elektr. Feld \$E\$ und eine damit verbundene Potentialschwelle \$U\_D\$ überwinden müssen. Die Ladungsträger des Generationsstroms werden hingegen durch das Feld \$E\$ beschleunigt, können also über die Potentialschwelle \$U\_D\$ abfließen. Sie benötigen andererseits aber zu ihrer Erzeugung die Energie \$\Delta W\$, also:

$$j_R \sim \exp\left(-\frac{eU_D}{k_B T}\right), \quad j_G \sim \exp\left(-\frac{\Delta W}{2k_B T}\right) \quad (3)$$

Legt man an den Halbleiter mit pn-Übergang eine äußere positive Spannung \$U\$ (+ an die p-, - an die n-Seite), so wird die Potentialschwelle \$U\_D\$ um \$U\$ erniedrigt, bei Anlegen einer negativen Spannung entsprechend erhöht. Der Rekombinationsstrom wird um den Faktor \$\exp(eU/kT)\$ geändert, der Generationsstrom bleibt unverändert (siehe Abb. 6). Der Gesamtstrom durch den pn-Übergang ist damit:

$$j(U) = j_R(U) + j_G = j_R(U) - j_R(0) \quad \text{bzw.} \quad (4)$$

$$j(U) = j_R(0) \left( e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right)$$

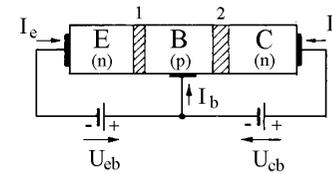


**Abb.6:** Schema des Energieverlaufs der bewegl. Ladungsträger in der Grenzschicht eines pn-Übergangs: a) ohne äußere Spannung, b) mit Spannung  $U$  in Flussrichtung, c) mit Spannung  $U$  in Sperrichtung;  $U_D$ : Potentialschwelle für  $U = 0$ ,  $E$ : elektr. Feld,  $j_{R,G}$ : Rekombinations- bzw. Generationsstrom

Gleichung (4) beschreibt die ideale Kennlinie eines pn-Übergangs. Mögliche Abweichungen einer Diodenkennlinie von diesem Verlauf sind auf eine Reihe von Annahmen bei der Ableitung von Gl. (4) zurückzuführen, die für eine Diode nicht alle gelten müssen. So können z.B. Elektronen und Löcher auch in der Grenzschicht zwischen p- und n-Gebiet rekombinieren. Dies äußert sich in einem schwächeren Anstieg der Kennlinie in Flussrichtung, der sich häufig durch einen Exponenten  $eU/2kT$  in Gl. (4) beschreiben lässt. Davon unabhängig tritt bei großen Spannungen in Sperrichtung ein neuer Mechanismus auf: Bei einer vom HL und seiner Dotierung abhängigen Spannung steigt der Strom in Sperrichtung stark an (s. Abb. 4b). Dies ist auf das Eintreten von Stoßionisation der Ladungsträger an der Grenzschicht (Lawineneffekt) sowie weiterer Effekte zurückzuführen (Zener-Effekt u.a.).

### 2.3 Transistor

Aus der Halbleiterdiode lässt sich durch Hinzufügen eines weiteren p- oder n-Halbleiters ein neues elektronisches Bauelement herstellen, dessen Wirkungsweise der einer Röhrentriode ähnelt und das als Transistor bezeichnet wird. Je nachdem, ob ein p- oder n-Halbleiter zugefügt wird entsteht ein pnp- oder npn-Transistor. Diese beiden Transistortypen sind in ihrem Verhalten zueinander komplementär.



**Abb.7:** Schema eines npn-Transistors

In Abb. 7 ist ein npn-Transistor schematisch dargestellt. Denkt man sich zunächst nur die Grenzschicht 2 in Sperrichtung angeschlossen ( $U_{cb} > 0$ ), so fließt durch sie nur der kleine von den Minoritäten getragene Feld- bzw. Generationstrom. Wird zusätzlich die Grenzschicht 1 in Flussrichtung angeschlossen ( $U_{eb} < 0$ ), so können durch sie jeweils sehr viele Majoritätsträger in das jeweils andere Gebiet hindiffundieren, Löcher in das n-, Elektronen in das p-Gebiet. Da das p-Gebiet eines npn-Transistors sehr klein ist, gelangen die meisten Elektronen bis in die in Sperrichtung gepolte Grenzschicht 2. Hier sind sie aber Minoritätsträger und werden vom elektrischen Feld in das rechte n-Gebiet getrieben. Die Grenzschicht 1 emittiert Elektronen, die von der Grenzschicht 2 aufgesammelt werden. Daher rühren auch die Bezeichnungen *Emitter* **E** für die in Flussrichtung gepolte pn-Schicht, *Kollektor* **C** für die in Sperrichtung gepolte pn-Schicht und *Basis* **B** für das zwischen beiden liegende Halbleiterstück.

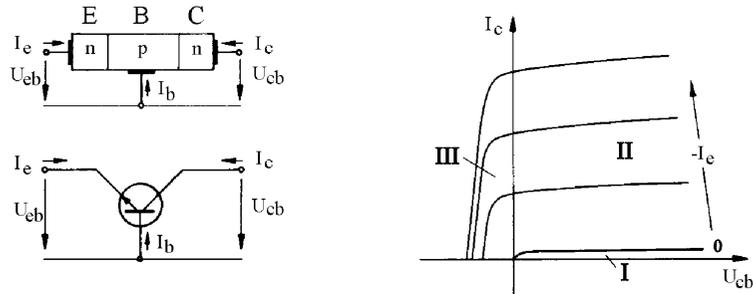
Der vom Emitter ausgehende Elektronenstrom  $-I_e$  gelangt fast vollständig in den Kollektorstromkreis und fließt dort als Kollektorstrom  $I_c$  weiter. Nur ein geringer Bruchteil (ca. 0,5 - 10 %) des Emitterstroms fließt über den Basisanschluss als Basisstrom  $I_b$  ab. Der Kollektorstrom  $I_c$  hängt also von  $I_e$  ab,  $I_c$  wird von  $I_e$  gesteuert. Es gilt:

$$I_c = -\alpha I_e, \quad 0,90 < \alpha < 0,995 \quad (5)$$

$\alpha$  ist die Kurzschluss-Stromverstärkung eines Transistors in Basisschaltung. Gl. (5) gilt exakt, wenn der Widerstand des äußeren Kollektorstromkreises klein im Vergleich zu dem der Kollektorstrecke ist. (Für einen pnp-Transistor gelten analoge Überlegungen. Hierbei ist nur die Rolle der Elektronen und Löcher vertauscht und die Polarität der Anschlüsse umgekehrt.)

Abb. 8 zeigt das Schaltzeichen und das Kennlinienfeld  $I_c(U_{cb})$  eines npn-Transistors in Basisschaltung. Der Kollektorstrom ist nicht ganz unabhängig von der Kollektorspannung  $U_{cb}$ . Wenn diese ansteigt, dringt die Raumladung weiter in die Basiszone ein und ein größerer Teil des Emitterstroms gelangt zum Kollektor.

Die Kennlinien steigen also mit wachsender Spannung  $U_{cb}$  leicht an.



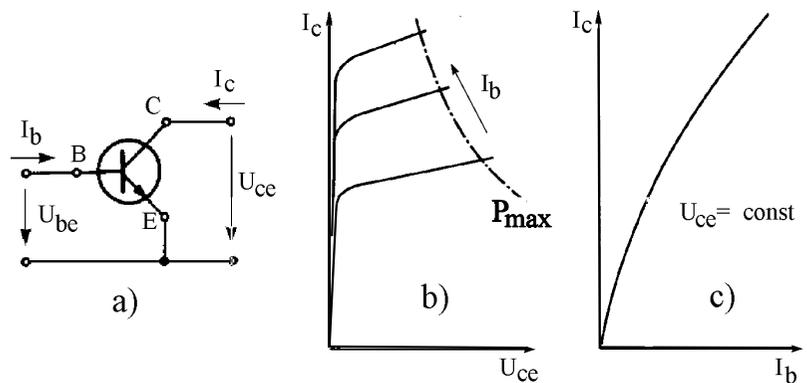
**Abb.8:** a) Schaltschema, Schaltsymbol und b) Kennlinienfeld  $I_c(U_{cb})$  eines npn-Transistors in Basisschaltung: I: Sperrbereich ( $I_c > 0$ ), II: Aktiver Bereich, III: Sättigungsbereich ( $U_{cb} < 0$ )

einer Röhrentriode, die den Zusammenhang zwischen Anodenstrom  $I_a$ , Anodenspannung  $U_a$  und Gitterspannung  $U_g$  wiedergeben. Beim Transistor erfolgt die Steuerung durch den Basisstrom, bei der Röhre durch die Gitterspannung.

Bei der Emitterschaltung eines Transistors fließt im Eingangskreis nur die Differenz zwischen Emittterstrom und Kollektorstrom, also der sehr kleine Basisstrom  $I_b$  ( $I_b = -I_c - I_e$ ), d.h. die Emitterschaltung erlaubt die Steuerung des großen Stroms  $I_c$  durch den kleinen Strom  $I_b$ . Der Transistor wirkt als Stromverstärker. Für die Stromverstärkung  $\beta$  in Emitterschaltung gilt:

$$\beta = \left| \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b} \right| = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (6)$$

Den angegebenen Werten  $0,9 < \alpha < 0,995$  entsprechen Werte  $10 < \beta < 200$ . Aus der  $I_c(I_b)$ -Kennlinie lässt sich der Verstärkungsfaktor  $\beta$  als Steigungsmaß der Kurve entnehmen. Wegen der Krümmung dieser Kurve ist der Verstärkungsfaktor  $\beta$  nicht konstant sondern von der Basisstromstärke abhängig.



**Abb.9:** npn-Transistor in Emitterschaltung: a) Schaltschema b) Kennlinienfeld  $I_c(U_{ce})$ , c) Kenlinie  $I_c(I_b)$

Da der Kollektorstrom sich nicht sehr vom Emittterstrom unterscheidet, liegt es nahe, nicht mit dem Emittter sondern mit der Basis zu steuern. Abb. 9a zeigt einen npn-Transistor in Emitterschaltung, Abb. 9b u. c das Kennlinienfeld  $I_c(U_{ce})$  und  $I_c(I_b)$ . Diese Kennlinien entsprechen den  $I_a(U_a)$  - bzw. den  $I_a(U_g)$  - Kennlinien

### 3. Aufgabenstellung

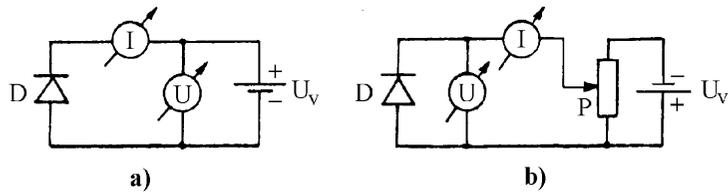
- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie Kennlinie einer HI-Diode in Sperr- und Flussrichtung.
- 2. Aufgabe:** Tragen Sie das Messergebnis für die Flussrichtung halblogarithmisch auf Millimeterpapier auf und vergleichen Sie den Verlauf  $\ln I(U)$  mit dem einer idealen Gleichrichter-kennlinie, Gl. (4).
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Kennlinien des Transistors 2N3055:  $I_c(U_{ce})$ ,  $I_c(I_b)$  und  $I_b(U_{be})$ .
- 4. Aufgabe:** Tragen Sie die Messergebnisse für  $I_c$  auf Millimeterpapier auf und bestimmen Sie die maximale Stromverstärkung  $\beta$ . Vergleichen Sie den Verlauf  $\ln I_b(U_{be})$  mit dem einer idealen Diodenkennlinie.

### 4. Versuchsdurchführung und Auswertung

#### Aufgabe 1 u. 2, HI-Diode:

Stellen Sie zur Bestimmung der Diodenkennlinie  $I(U)$  die Schaltungen gem. Abb.

10 her. Beachten Sie, dass der Strommesser für die Sperr- und Flussrichtung sich an verschiedenen Stellen der Schaltung befindet (Warum?).



**Abb.10:** Schaltung zur Bestimmung der Kennlinie einer HL-Diode:  
a) Sperrichtung, b) Flussrichtung; D Diode, U Spannungs-,  
I Strommesser, P Potentiometer,  $U_V$  Versorgungsspannung

Bestimmen Sie zunächst den maximalen (geringen) Strom in Sperrichtung für Spannungen  $0 < U = U_V < 50 \text{ V}$ . Stellen Sie für die folgenden Messungen  $I(U)$  in Flussrichtung die Versorgungsspannung  $U_V$  auf ca. 1 V ein und bestimmen Sie den Strom durch die Diode für Spannungen  $U$  von 0 bis 0,8 V in 0,05 V - Schritten mit Hilfe des Potentiometers P (10 Ohm). Prüfen Sie für kleine Ströme  $I$ , welcher Anteil davon durch den Spannungsmesser fließt, indem Sie diesen nach Einstellen der Spannung vom Stromkreis abtrennen.

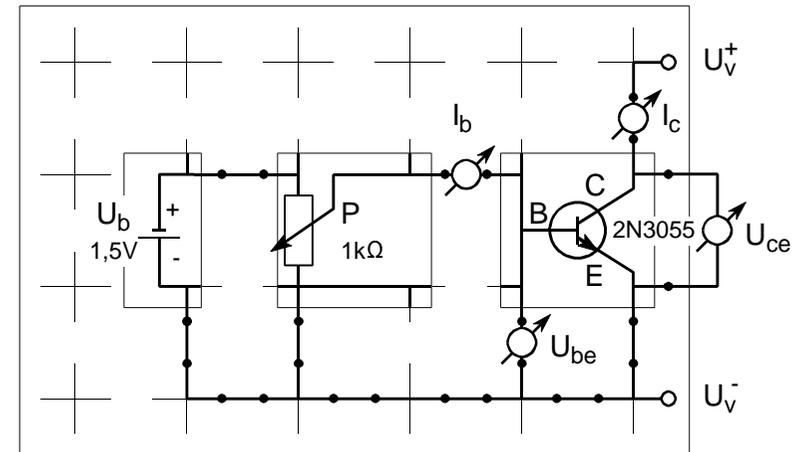
Tragen Sie das Messergebnis  $I(U)$  für die Flussrichtung halblogarithmisch auf ( $\ln I(U)$ ) und prüfen Sie ob der Strom im wesentlichen exponentiell mit der Spannung ansteigt. Vergleichen Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden mit dem Vorfaktor im Exponenten einer idealen Kennlinie, Gl. (4), für Raumtemperatur. Bestimmen Sie näherungsweise durch Extrapolation der Ausgleichsgeraden auf  $U = 0$  den Rekombinationsstrom  $I_R (U = 0)$  und vergleichen Sie diesen Wert mit dem gemessenen maximalen Strom durch die Diode in Sperrichtung.

### Aufgabe 3 u. 4, Transistor:

Stellen Sie zur Bestimmung der Kennlinien des Transistors 2N3055 auf einem Experimentier-Stecksystem die Emitterschaltung gem. Abb. 11 her. Für die Messungen sind jeweils nur 3 der Spannungs- bzw. Strommessgeräte notwendig.

Bestimmen Sie folgende Kennlinien:

- a)  $I_c (U_{ce})$  für  $U_{ce} = 2; 5; 10; 15; \dots 45; 50 \text{ V}$   
und jeweils  $I_b = 0,25; 0,5; 0,75$  und  $1 \text{ mA}$



**Abb.11:** Ermittlerschaltung auf dem Experimentierstecksystem zur Bestimmung von Kennlinien des Transistors 2N3055

- b)  $I_c (I_b)$  für  $I_b = 0$  bis  $2 \text{ mA}$  in  $0,25 \text{ mA}$  - Schritten  
und  $U_{ce} = 5 \text{ V}$
- c)  $I_b (U_{be})$  für  $U_{be} = 50$  bis  $750 \text{ mV}$  in  $50 \text{ mV}$  - Schritten  
und  $U_{ce} = 5 \text{ V}$

Beachten Sie, dass die (hier durch die Kühlung bedingte) maximale Verlustleistung des Transistors  $P_{\max} = U_{ce} \cdot I_c = 5 \text{ W}$  **nicht** überschritten werden sollte. Zeichnen Sie für die Messung a) in ein vorbereitetes Diagramm  $I_c (U_{ce})$  (mit  $I_{c \max} = 200 \text{ mA}$ ) auf Millimeterpapier die Hyperbel  $P_{\max}$  ein und tragen Sie die Messwerte direkt nach der Messung zur Kontrolle ein. Stellen die Spannung  $U_{ce}$  über die Versorgungsspannung  $U_V$  und den Strom  $I_b$  mit dem Potentiometer P ein.

Prüfen Sie bei der Messung c) für kleine Ströme  $I_b$  den Messfehler infolge des Messstromes durch den Spannungsmesser  $U_{be}$ , indem Sie diesen nach Einstellen der Spannung von der Schaltung abtrennen.

Tragen Sie die Messergebnisse für b) linear, für c) halblogarithmisch (wie für die

HL-Diode) auf Millimeterpapier auf. Bestimmen Sie aus der Auftragung für b) die maximale Stromverstärkung  $\beta$ . Vergleichen Sie das Messergebnis c) wie in der 2. Aufgabe mit einer idealen Gleichrichtercharakteristik.

### 5. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie unterscheidet sich das Verhalten der elektr. Leitfähigkeit eines Halbleiters von dem eines Metalls? Beschreiben Sie die verschiedenen *Leitungsmechanismen* eines Halbleiters.
- 2) Welches charakteristische Verhalten der elektr. Leitung zeigt ein Halbleiter im (räumlichen) Übergangsbereich zwischen (homogener) p- und n-Dotierung?
- 3) Beschreiben Sie den Konzentrationsverlauf der ortsfesten und beweglichen elektr. Ladungen in der Nähe des *pn-Übergangs*.
- 4) Welche elektr. Teilströme fließen im thermischen Gleichgewicht durch einen pn-Übergang, welche von diesen werden durch eine äußere Spannung beeinflusst?
- 5) Beschreiben Sie die I(U)-Kennlinie eines pn-Übergangs!
- 6) Aus welchen Dotierungsbereichen besteht ein *Transistor*?
- 7) Erklären Sie die Wirkungsweise eines *Transistors*.
- 8) Welchen Verlauf zeigen die Kennlinien  $I_c(U_{ce})$  und  $I_c(I_b)$  eines npn-Transistors in Emitter-Schaltung? Wie ist der *Verstärkungsfaktor*  $\beta$  definiert?

### Versuch C 12: Kennlinien von Elektronenröhren

**1. Literatur:** Bergmann-Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. II  
W. Walcher, Praktikum der Physik  
W. Westphal, Physikalisches Praktikum  
Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik,

**Stichworte:** Prinzip u. Aufbau von Elektronenröhren, therm.Emission von Elektronen aus Metallen, Austrittsarbeit, Elektronen im elektr. Feld, Steilheit, Durchgriff, innerer Widerstand einer Triode.

#### 2. Grundlagen

Neben den Halbleiter-Bauelementen findet die Elektronenröhre als aktives elektronisches Bauelement zur Gleichrichtung und Verstärkung kleiner und mittlerer elektr. Signale heute nur noch wenig Anwendung. Elektronenröhren werden jedoch noch in vielen Spezialfällen benutzt. Sie werden z.B. als Elektronenstrahlröhre in Oszillografen oder Bildschirmgeräten, als Röntgenröhre zur Erzeugung von Röntgenstrahlen oder als Senderöhre zur Erzeugung von Radio- und Mikrowellen großer Leistung verwendet. Aber auch etwa zur Messung kleinster Drucke in einem Ultra-Hochvakuum wird die Elektronenröhre heute noch eingesetzt.

Das Funktionsprinzip der Elektronenröhre beruht auf der Steuerung eines Elektronenstrahls in einem Hochvakuum. Dazu sind bei einfachen Elektronenröhren Metallelektroden in einem evakuierten Glaskolben angebracht. Aus einer Elektrode, der Kathode, werden durch (meistens) indirekte elektrische Heizung Elektronen thermisch in das Vakuum emittiert und von einer weiteren Elektrode, der Anode, aufgefangen. Die Steuerung des Elektronenstrahls zwischen Kathode und Anode erfolgt durch magnetische oder elektrische Felder. Dazu sind je nach Anwendung Magnetspulen oder eine Reihe von weiteren Elektroden an bzw. in der Röhre angebracht. Nach der Zahl der Elektroden einer Röhre unterscheidet man Diode, Triode, Tetrode oder Pentode.

#### 2.1 Diode

In Abb. 1a sind das Schaltungssymbol und die verwendeten Bezeichnungen für eine Hochvakuumdiode dargestellt. Auf die Darstellung des Heizfadens für die Kathode und seiner Anschlüsse wird dabei verzichtet. Abb. 1b zeigt schematisch die Kennlinie einer Hochvakuumdiode,  $I_a(U_a)$ , die die Abhängigkeit des Anodenstroms  $I_a$  von der zwischen Anode A und Kathode K liegenden

Anodenspannung  $U_a$  beschreibt. Ein wesentlicher Strom fließt nur bei positiver Spannung  $U_a$ . Die Diode wirkt als Gleichrichter wie das deshalb namensgleiche Halbleiter-Bauelement. Man unterscheidet bei der Vakuum-Diode drei Gebiete ihrer Kennlinie, das Anlaufstrom-, das Raumladungs- und das Sättigungsgebiet.

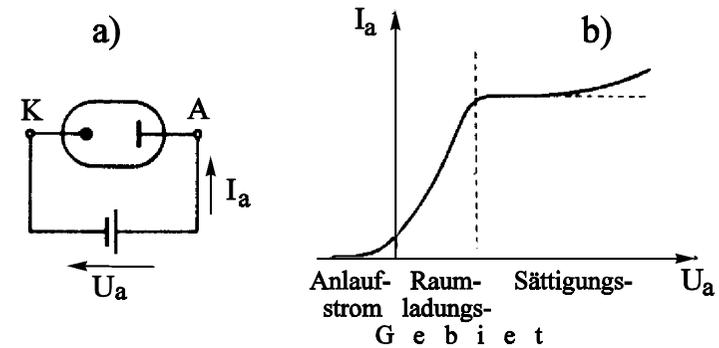
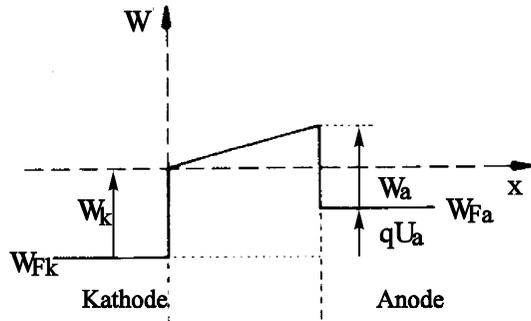


Abb.1: Hochvakuumdiode: a) Schaltsymbol, b) Kennlinie

Zur Erklärung der Kennlinie werden im folgenden Kathode und Anode in einem einfachen Potenzialtopfmodell betrachtet. Abb. 2 zeigt den Verlauf der Energie  $W$  der Leitungselektronen als Funktion der Ortskoordinate  $x$  vom Inneren der Kathode bis ins Innere der Anode für die Temperatur  $T = 0$  K.  $W_{Fk}$  und  $W_{Fa}$  bzw.  $W_k$  und  $W_a$  sind die Fermienergien bzw. Austrittsarbeiten der Leitungselektronen für Kathode und Anode,  $q U_a = - e U_a$  die Energiedifferenz der Fermienergien aufgrund der zwischen Anode und Kathode liegenden Spannung  $U_a$ . Das sogenannte Fermienergie  $W_F$  ist die Maximalenergie der Leitungselektronen in einem Metall bei  $T = 0$ . Die Austrittsarbeit  $W$  ist die Energie, die ein Leitungselektron benötigt, um vom Energieniveau  $W_F$  im Inneren eines Metalls durch die Oberfläche in den Außenraum (das feldfreie Vakuum) zu gelangen. Fermienergie und Austrittsarbeit sind für jedes Element spezifische Größen. Die Austrittsarbeit liegt für metallische Elemente zwischen ca. 2 und 5 eV, für Metalle mit spezieller Oxidbeschichtung kann sie auf ca. 1 eV reduziert werden.

Für endliche Temperaturen haben die Leitungselektronen eines Metalls zusätzlich zu  $W_F$  eine mittlere thermische Energie  $W_T$  von der Größenordnung  $k_B T$  ( $k_B =$  Boltzmann-Konstante). Diese Energie ist selbst bei einer Temperatur von ca. 1000 K (der üblichen Kathodentemperatur einer Röhre) viel zu klein, um ein Austreten der Elektronen aus dem Metall zu ermöglichen. Nur aufgrund der sehr unter-



**Abb.2:** Verlauf der Elektronenenergie zwischen Kathode und Anode einer Diode im Anlaufstromgebiet ( $U_a < 0, T = 0$ )

schiedlichen Verteilung der thermischen Energie auf die Elektronen sind einige von diesen in der Lage, die Potenzialbarriere  $W$  an der Oberfläche zu überwinden. Man findet für den Strom aufgrund dieser thermischen Emission der Elektronen (Richardson-Dushman-Formel):

$$I_{th} = AT^2 \exp\left(-\frac{W}{k_B T}\right) \quad (1)$$

mit einer Konstanten  $A$ .

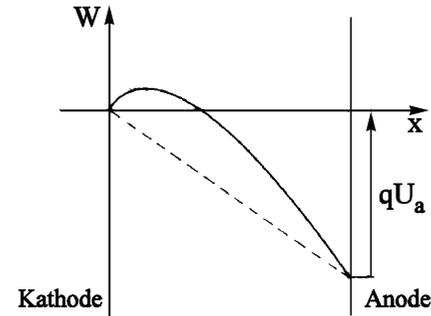
Im Anlaufstromgebiet einer Vakuumdiode fließt, wie Abb. 1b andeutet, kein oder nur ein geringer Elektronenstrom von der Kathode zur Anode. Dieser wird durch die Elektronen aus der Kathode verursacht, deren thermische Energie zur Überwindung des Potenzialberges  $W_e = W_a - eU_a > W_k$  ausreicht (s. Abb. 2). Man findet mit Gl. (1) und  $W = W_e$  das Anlaufstromgesetz:

$$I_A = AT^2 \exp\left(\frac{-W_a + eU_a}{k_B T}\right) = I_0 \exp\left(\frac{eU_a}{k_B T}\right) \quad (2)$$

$T$  ist hierbei die Temperatur der Kathode,  $I_0$  eine Konstante, die von der Temperatur, der Austrittsarbeit  $W_a$  der Anode und von der Geometrie der Diode abhängt.

Im Raumladungsgebiet der Diodenkennlinie, also bei genügend positiver

Anodenspannung  $U_a$ , wird das Potenzial auf der Anodenseite soweit abgesenkt, dass für die Elektronen zwischen Kathode und Anode eine beschleunigende Feldstärke entsteht. Mit den von der Kathode emittierten Elektronen ist zum anderen eine negative Raumladung verbunden, die aufgrund der Abstoßung gleicher Ladungen untereinander ein Maximum im Potenzialverlauf zwischen Kathode und Anode bewirkt und den Elektronenstrom vermindert.



**Abb.3:**

Energieverlauf im Raumladungsgebiet einer Diode, schematisch ( $U_a > 0$ , Differenz der Austrittsarbeiten  $W_a - W_k$  vernachlässigt)  
 — mit Raumladung  
 - - - ohne Raumladung

Abb. 3 zeigt schematisch den Potenzialverlauf zwischen Kathode und Anode. Man findet für den Strom im Raumladungsgebiet der Kennlinie (Langmuir und Schottky):

$$I_R = C U_a^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

Hierbei ist  $C$  eine weitere Konstante, die von der Bauart der Röhre abhängt.

Im Sättigungsgebiet der Diodenkennlinie ist die beschleunigende Anodenspannung  $U_a$  hinreichend groß, so dass der Einfluss der Raumladungen verschwindet und alle thermisch emittierten Elektronen der Kathode zur Anode gelangen. Es fließt der Sättigungsstrom  $I_S$ , der mit Gl. (1),  $W = W_k$  gegeben ist:

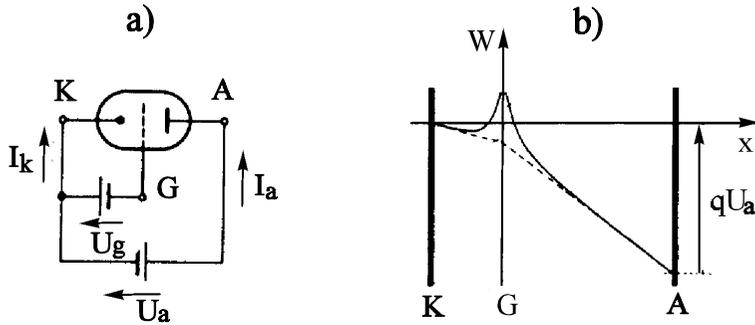
$$I_S = AT^2 \exp\left(-\frac{W_k}{k_B T}\right) \quad (4)$$

$W_k$  ist die Austrittsarbeit und  $T$  die Temperatur der Kathode. Ein weiteres schwaches Ansteigen des Anodenstromes mit steigender Anodenspannung beruht

auf einem Feldeffekt an der Kathodenoberfläche und kann mit dem einfachen Potenzialtopf-Modell (Abb. 2) nicht erklärt werden.

### 2.2 Triode

Bei einer Triode ist zwischen Kathode und Anode eine weitere Elektrode, das Gitter, angebracht. Es besteht aus einer Reihe von Stäben oder aus einem Drahtnetz. Abb. 4a zeigt das Schaltsymbol der Triode, Abb. 4b schematisch den Potenzialverlauf zwischen Kathode und Anode bei negativer Gitterspannung  $U_g$  zwischen Gitter und Kathode:



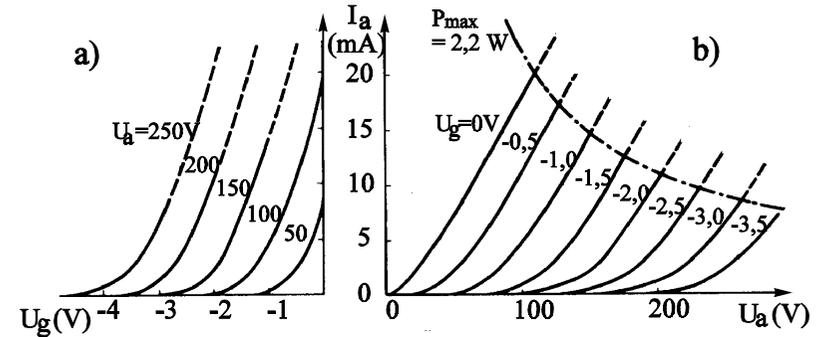
**Abb.4:** Hochvakuumtriode: a) Schaltsymbol, b) Potenzialverlauf zwischen Kathode und Anode, schematisch; ——— Verlauf in der Ebene eines Gitterstabes G, - - - Verlauf zwischen dem Gitter

Man kann schon durch eine relativ kleine negative Gitterspannung den Potenzialverlauf zwischen Kathode und Anode so verändern, dass der Anodenstrom  $I_a$  sich stark ändert. Darauf beruht die Verstärkerwirkung der Triode.

Abb. 5a zeigt das Kennlinienfeld  $I_a(U_g)$  mit der Anodenspannung  $U_a$  als Parameter, Abb. 5b das Kennlinienfeld  $I_a(U_a)$  mit der Gitterspannung  $U_g$  als Parameter:

Aus den Kennlinienfeldern lassen sich drei charakteristische Kenngrößen einer Triode ableiten:

Die *Steilheit*  $S$  ist das Verhältnis der Anodenstromänderung  $dI_a$  zur verursachenden Gitterspannungsänderung  $dU_g$  bei konstanter Anodenspannung  $U_a$ .



**Abb.5:** Kennlinienfeld einer Triode: a)  $I_a(U_g)$ ,  $U_a = \text{const.}$   
b)  $I_a(U_a)$ ,  $U_g = \text{const.}$

$$S = \frac{dI_a}{dU_g}, \quad U_a = \text{const.} \quad (5)$$

Der *Durchgriff*  $D$  ist das Verhältnis der Gitterspannungsänderung  $dU_g$  zur Anodenspannungsänderung  $dU_a$  bei konstantem Anodenstrom  $I_a$ .  $D$  gibt an, in welchem Maße sich  $U_g$  ändern muss, um bei einer Änderung von  $U_a$  den Anodenstrom konstant zu halten.

$$D = \frac{dU_g}{dU_a}, \quad I_a = \text{const.} \quad (6)$$

Der *Innere Widerstand*  $R_i$  beschreibt das Verhältnis von Anodenspannungsänderung  $dU_a$  zur Anodenstromänderung  $dI_a$  bei konstanter Gitterspannung  $U_g$ .

$$R_i = \frac{dU_a}{dI_a}, \quad U_g = \text{const.} \quad (7)$$

Für einen linearen Verlauf von Kennlinienstücken können die differentiellen Größen  $dI_a$ ,  $dU_a$  und  $dU_g$  in Gln. (5,6,7) durch entsprechende Differenzen  $\Delta I_a = I_{a1} - I_{a2}$ ,  $\Delta U_a = \dots$ ,  $\Delta U_g = \dots$  ersetzt werden. Die Beziehung zwischen den drei Kenngrößen wird durch die *Barkhausensche Röhrenformel* wiedergegeben:

$$\text{SDR}_i = 1$$

(8)

Da die Röhrenkennlinien in größeren Strom-Spannungsbereichen nicht linear sind, sind Steilheit, Durchgriff und innerer Widerstand einer Triode von der Wahl des Arbeitspunktes abhängig.

### 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Für eine Diode ist die Kennlinie  $I_a(U_a)$  für verschiedene Anodenspannungen  $U_a$  aufzunehmen, für negative Anodenspannungen bei zwei verschiedenen Kathodentemperaturen (Heizspannungen).
- 2. Aufgabe:** Die Kennlinien sind für die verschiedenen Gebiete geeignet aufzutragen. Aus dem Verlauf der Kennlinien im Anlaufstromgebiet sind die Kathodentemperaturen sowie die Austrittsarbeit der Anode zu bestimmen.
- 3. Aufgabe:** Für eine Triode sind die Kennlinien  $I_a(U_a)$  und  $I_a(U_g)$  bei verschiedenen konstanten Spannungen  $U_g$  bzw.  $U_a$  als Parameter aufzunehmen.
- 4. Aufgabe:** Aus den Kennlinien werden die Röhrenkennwerte  $S$ ,  $D$  und  $R_i$  entnommen. Man prüfe ob die Barkhausen-Formel erfüllt ist.

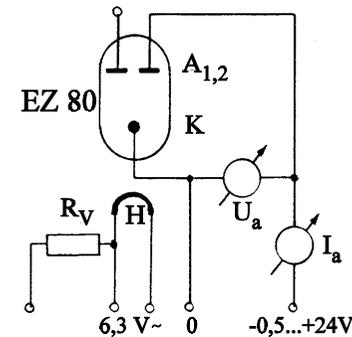
### 4. Versuchsdurchführung

#### 4.1 Diode

##### Aufgabe 1:

Es wird die Kennlinie  $I_a(U_a)$  der Doppeldiode EZ 80 für Anodenspannungen  $U_a$  von  $-0,5 \text{ V}$  bis  $+24 \text{ V}$  bestimmt. Die Heizspannung der Röhre ist  $U_H = 6,3 \text{ V}$  (indirekte Heizung), der max. Anodenstrom  $I_{a \text{ max}} = 90 \text{ mA}$ .

Die im Versuch benutzte Schaltung zeigt Abb. 6. Es wird nur eine Anode der Röhre angeschlossen. Zur Messung der Anodenspannung wird ein Digitalvoltmeter benutzt. Als Spannungsquelle dient ein Netzgerät mit den Ausgängen  $0 \dots -20 \text{ V} =$ ,  $0 \dots +300 \text{ V} =$  und  $6,3 \text{ V} \sim$ . Der Vorwiderstand  $R_v$  dient zur Verminderung der Heizspannung.



**Abb.6:**

Schaltung zur Kennlinienbestimmung der Diode EZ 80

A<sub>1,2</sub> Anoden  
K Kathode  
H Heizung  
R<sub>v</sub> Vorwiderstand

Betreiben Sie die Röhre zunächst mit der vollen Heizspannung von  $6,3 \text{ V}$  und bestimmen Sie den Anodenstrom  $I_a$  bei positiven Spannungen  $U_a$ :

- von ca.  $0 - 5 \text{ V}$  in ca.  $0,5 \text{ V}$  - Schritten,
- von ca.  $5 - 10 \text{ V}$  in ca.  $1 \text{ V}$  - Schritten,
- von ca.  $10 - 24 \text{ V}$  in ca.  $2 \text{ V}$  - Schritten.

Benutzen Sie für den Spannungsbereich  $0 - 10 \text{ V}$  den  $20 \text{ V}$ -Ausgang, für  $10 - 24 \text{ V}$  den  $300 \text{ V}$ -Ausgang des Netzgerätes.

Zur Aufnahme der Kennlinie bei negativer Anodenspannung wird wieder der  $20 \text{ V}$ -Ausgang benutzt und der Anodenstrom  $I_a (< 100 \mu\text{A})$  für 11 Spannungswerte  $U_a$  im Bereich von ca.  $0$  bis ca.  $-0,5 \text{ V}$  bestimmt. Schließen Sie hierfür einen dekadisch geteilten Widerstand ( $10 \times 100 \Omega$ ) mit seinen Anschlüssen  $0$  und  $10$  an den  $20 \text{ V}$ -Spannungsausgang an und die Röhre an die Anschlüsse  $0$  und den Abgriff ( $x$ ). Stellen Sie dann mit dem Netzgerät in der Position  $x = 10$  die Spannung  $U_a$  auf ca.  $0,5 \text{ V}$  ein und messen Sie den (sehr geringen) Anodenstrom  $I_a$ . Verringern Sie darauf den Betrag der Spannung  $U_a$  durch stufenweises Verstellen des Abgriffs  $x$  und bestimmen Sie  $I_a(U_a)$ . Wiederholen Sie diesen Versuchsteil, um Mess- und Ablesefehler zu verringern.

Führen Sie nun die Bestimmung der Kennlinie bei negativer Anodenspannung mit verminderter Heizspannung (Kathodentemperatur) durch, indem Sie den Vorwiderstand  $R_v$  mit dem Heizfaden der Röhre in Serie schalten. Warten Sie bis sich die Temperatur der Kathode stabilisiert hat (d.h. der Strom  $I_a$  bei  $U_a = 0$  stabil ist) und führen Sie die Messung wie bei voller Heizspannung durch.

##### Aufgabe 2:

Die Messergebnisse für positive Anodenspannungen sind sowohl linear als auch

doppelt logarithmisch auf Millimeterpapier aufzutragen, also:

$$I_a = f(U_a) \quad \text{bzw.} \quad \ln(I_a) = f(\ln(U_a)).$$

Prüfen Sie, inwieweit Gl. (3) für das Raumladungsgebiet der Kennlinie zutrifft, indem Sie den Exponenten  $n$  der Kennlinie  $I_a = C U_a^n$  für verschiedene Spannungsbereiche bestimmen.

Für negative Anodenspannungen  $U_a$  sind die Kennlinien für die verschiedenen Heizspannungen der Kathode halblogarithmisch auf Millimeterpapier aufzutragen, also:

$$\ln(I_a) = f(U_a).$$

Bestimmen Sie die Steigungen der Ausgleichsgeraden im Anlaufstromgebiet und berechnen Sie mit Gl. (2) die Kathodentemperaturen. Schätzen Sie den Fehler hierfür ab, indem Sie die Ausgleichsgeraden variieren. Aus dem Verhältnis der Achsenabschnitte  $I_a(U_a = 0)$  wird mit den berechneten Temperaturen und Gl. (2) die Austrittsarbeit  $W_a$  der Anode bestimmt. Schätzen Sie auch hierfür den durch die Ausgleichsgeraden bestimmten maximalen Fehler ab.

## 4.2 Triode

### Aufgabe 3 u. 4:

Es werden Kennlinienfelder der Triode EC 92 bestimmt. Die Heizspannung ist  $U_H = 6,3 \text{ V}$  (indirekte Heizung). Die Grenzdaten der Röhre sind:  $P_{a \max} = 2,5 \text{ W}$ ,  $U_{a \max} = 300 \text{ V}$ ,  $I_{k \max} = 15 \text{ mA} \approx I_{a \max}$ . Diese Grenzdaten dürfen während des Versuches nicht überschritten werden. Die Schaltung zur Aufnahme der Kennlinien zeigt Abb. 7.

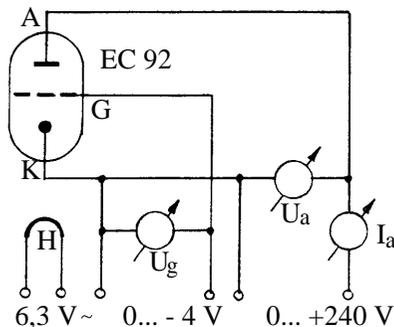


Abb.7:

Schaltung zur Kennlinienaufnahme der Triode EC 92

Als Netzgerät dient das gleiche wie das für die Diode benutzte. Zur Messung der Anodenspannung wird wieder ein Digitalvoltmeter benutzt. Vor Beginn der Messungen ist auf Millimeterpapier ein  $I_a(U_a)$ -Diagramm ( $I = 0 - 15 \text{ mA}$ ,  $U_a = 0 - 240 \text{ V}$ ) anzufertigen, auf dem die Hyperbel  $P_{a \max} = 2,5 \text{ W}$  und die Gerade  $I_{a \max} = 15 \text{ mA}$  eingezeichnet werden. Diese Grenzkurven sind bei den Messungen nicht zu überschreiten.

Es werden folgende Kennlinien bestimmt:

$$I_a(U_a) \quad \text{für } U_a = 20 - 240 \text{ V in } 20 \text{ V - Schritten} \\ \text{und jeweils } U_g = 0, -0,5, -1, -1,5, -2 \text{ V.}$$

$$I_a(U_g) \quad \text{für } U_g = 0 \text{ bis } -4 \text{ V in } 0,5 \text{ V - Schritten} \\ \text{und jeweils } U_a = 50, 100, 150, 200 \text{ V.}$$

Tragen Sie die Messergebnisse für  $I_a(U_a)$  in das vorbereitete Diagramm direkt ein. Fertigen Sie ein zweites Diagramm auf Millimeterpapier an, in dem Sie die Messergebnisse für  $I_a(U_g)$  ebenfalls direkt eintragen. Beachten Sie auch bei dieser Messung, dass die max. Leistung  $P_{a \max}$  und der max. Anodenstrom  $I_{a \max}$  nicht überschritten werden. Aus dem linearen Verlauf der Kennlinien werden die Werte für Steilheit  $S$ , Durchgriff  $D$  und innerer Widerstand  $R_i$  entnommen. Prüfen Sie die Gültigkeit der Barkhausen-Formel, Gl. (8).

## 5. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie ist eine *Vakuum-Diode* im wesentlichen aufgebaut und welche Funktionen haben ihre Elemente?
- 2) Beschreiben Sie den Kennlinienverlauf  $I_a(U_a)$  einer Diode. Welche Bereiche der Kennlinie lassen sich unterscheiden?
- 3) Erklären Sie mit Hilfe des *Potenzialtopfmodells* die Energieverhältnisse der Elektronen in einer Hochvakuum-Diode und begründen Sie damit den Kennlinienverlauf.
- 4) Wie ist eine Hochvakuum-Triode aufgebaut und worauf beruht ihre Verstärkerwirkung?
- 5) Beschreiben Sie den Verlauf der Kennlinien einer Triode. Wie sind die Größen *Steilheit*, *Durchgriff* und *Innerer Widerstand* definiert?
- 6) Was besagt die *Barkhausensche Röhrenformel*?

## Versuch C 13: Transistorverstärker

**1. Literatur:** W. Walcher, Praktikum der Physik  
Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik  
Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. 2  
Unger/Schultz, Elektronische Bauelemente und Netzwerke,  
Bd. 1

**Stichworte:** Transistor, Kennlinien, Emitter-, Basis-, Kollektorschaltung  
Arbeitspunkt, Strom-, Spannungs-, Leistungsverstärkung,  
Frequenzgang, Strom-Gegenkopplung

### 2. Grundlagen

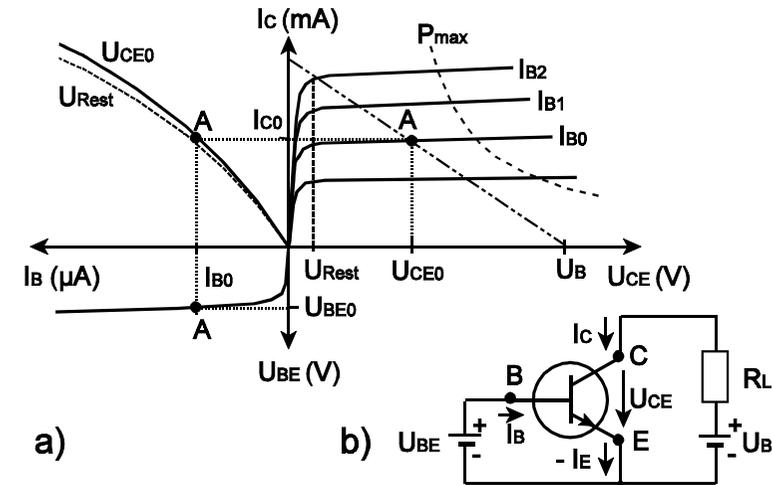
Die für den vorliegenden Versuch notwendigen Grundkenntnisse der physikalischen Eigenschaften von Transistoren als Halbleiterbauelemente werden hier vorausgesetzt. Siehe dazu z.B. Versuch C11: *Kennlinien von HL-Diode und Transistor*.

Die wesentliche Ursache für die Verstärkung elektrischer Signale durch einen Transistor beruht auf seiner Eigenschaft, mittels eines geringen Stroms zwischen Basis und Emitter einen wesentlich größeren Strom zwischen Kollektor und Emitter zu steuern. Die für die jeweilige Anwendung gewünschte Verstärkung des Transistors kann zum einen durch die Auswahl der drei möglichen Grundschaltungen *Emitter-, Basis-, Kollektorschaltung* zwischen Eingangs-, Ausgangs- und Versorgungsspannung erfolgen. Zum anderen kann sie durch die einzelne Beschaltung seiner Anschlüsse hinsichtlich spezieller Anforderungen an den Verstärker erreicht bzw. optimiert werden.

Im vorliegenden Versuch werden die Verstärkereigenschaften eines ein- sowie zweistufigen Verstärkers in Emitterschaltung mit dem npn-Si-Transistor BC 140 für verschiedene Beschaltungen untersucht.

#### 2.1 Transistor als Verstärker

Abb. 1b zeigt zur Übersicht das Schaltsymbol eines npn-Transistors mit den Strömen  $I_B$ ,  $I_C$  und  $I_E$  durch seine Anschlüsse Basis, Kollektor und Emitter sowie die Spannungen  $U_{BE}$  und  $U_{CE}$  zwischen Basis und Emitter bzw. Kollektor und Emitter.  $U_B$  ist die Betriebsspannung,  $R_L$  der für die Spannungsverstärkung nötige Lastwiderstand. Abb. 1a gibt schematisch die wichtigen Kennlinien  $I_C(U_{CE})$ ,  $I_C(I_B)$  und  $I_B(U_{BE})$  wieder. Man beachte, dass die nach unten aufgetragene Spannung  $U_{BE}$  und der nach links aufgetragene Strom  $I_B$  positive Größen sind.



**Abb. 1:** npn-Transistor: a) Kennlinienfeld  $I_C(I_B)$ ,  $I_C(U_{CE})$ ,  $I_B(U_{BE})$ ;  
b) Anschlussschema für Ströme und Spannungen

Die Kennlinie  $I_B(U_{BE})$  zeigt, dass oberhalb der Diffusionsspannung  $U_D$  des pn-Übergangs zwischen Basis und Emitter ( $U_D \approx 0,6 \text{ V}$  für Si)  $I_B$  mit steigender Spannung  $U_{BE}$  steil ansteigt.  $I_B$  ist hauptsächlich durch  $U_{BE}$  festgelegt und nahezu unabhängig von  $U_{CE}$ , solange  $U_{CE} > U_{BE}$  ist.

Die Kennlinie  $I_C(I_B)$  bestimmt die statische Stromverstärkung  $B = I_C/I_B$ . ( $B = 50 - 500$ ). Sie ist ebenfalls von  $U_{CE}$  nur wenig abhängig, solange  $U_{CE} > U_{Rest} \approx U_D$  ist.

Die Kennlinie  $I_C(U_{CE})$  zeigt, dass  $I_C$  für  $U_{CE} > U_{Rest}$  kaum von  $U_{CE}$ , dagegen stark vom Parameter  $I_B$  abhängt. Die gestrichelt gezeichnete Hyperbel  $P_{max} = (I_C U_{CE})_{max}$  gibt die maximal zulässige Verlustleistung des betreffenden Transistors an.

Die statische Einstellung der Spannung  $U_{BE0}$  legt die statischen Ströme  $I_{B0}$  und  $I_{C0}$  für die Spannung  $U_{CE0}$  fest, d.h. den jeweiligen *Arbeitspunkt A*.

Die statische Spannung  $U_{CE0}$  zwischen Kollektor und Emitter ist durch die Betriebsspannung  $U_B$  und den Lastwiderstand  $R_L$  festgelegt. Je größer der Strom  $I_C$  ist, desto größer ist der Spannungsabfall an  $R_L$  und desto kleiner die Spannung  $U_{CE}$ . Die durch den Punkt ( $I_C = 0$ ,  $U_{CE} = U_B$ ) strichpunktiert gezeichnete Gerade hat die Steigung  $-1/R_L$ . Sie schneidet die Kennlinie  $I_C(U_{CE0})$  im Arbeitspunkt A ( $I_{C0}$ ,  $U_{CE0}$ ). Aus dem Kennlinienfeld, Abb. 1a, ist qualitativ ersichtlich, dass eine kleine positive Änderung der Spannung  $U_{BE}$  eine Verschiebung des Arbeits-

punktes auf der Geraden und damit eine große negative Änderung der Spannung  $U_{CE}$  bewirkt.

Für die Anwendung interessant ist vor allem die Verstärkung von Wechselströmen und -spannungen mittels Transistoren. Wird dem Gleichstrom  $I_{B0}$  ein Wechselstrom mit Amplitude  $\Delta I_B$  überlagert, fließt ein zusätzlicher Kollektorstrom  $\Delta I_C$ , dessen Amplitude das  $\beta$ -fache von  $\Delta I_B$  beträgt. Man nennt:

$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \quad \text{dynamische Stromverstärkung} \quad (1)$$

$\beta$  ist wegen der Nichtlinearität der Kennlinie  $I_C(I_B)$  in der Regel etwas kleiner als die statische Stromverstärkung  $B$ .

Soll ein Transistor als Wechselstrom- bzw. Wechselspannungs-Verstärker betrieben werden, sind ebenfalls die Größen *dynamischer Eingangswiderstand*  $r_e$  und *dynamischer Ausgangswiderstand*  $r_a$  von Bedeutung:

$$r_e = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B} \quad (U_{CE} = \text{const.}), \quad r_a = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C} \quad (I_B = \text{const.}) \quad (2)$$

Die Werte  $\beta$ ,  $r_e$  und  $r_a$  sind wesentliche Transistoreigenschaften und heißen *dynamische Kennwerte*.

## 2.2 Transistor-Grundsaltungen

Nicht nur die Transistoren allein, sondern auch die Schaltungsart und Beschaltungswiderstände bestimmen die Eigenschaften einer Transistorverstärkerstufe. Man unterscheidet drei Grundsaltungstypen: *Emitter-*, *Basis-* und *Kollektorschaltung* (s. Abb. 2).

Bei der Emitterschaltung (Abb. 2a) stellt der Emitter die für Eingang und Ausgang gemeinsame Elektrode dar, bei der Basisschaltung (Abb. 2b) die Basis und bei der Kollektorschaltung (Abb. 2c) sinngemäß der Kollektor. Es ist nämlich zu beachten, dass die Anschlüsse der Versorgungsspannung ( $+U_B, 0V$ ) für Wechselspannungen grundsätzlich einen Kurzschluss darstellen.

Die häufigste und vorteilhafteste Schaltung ist die Emitterschaltung. Mit ihr kann sowohl große Strom-, Spannungs- als auch Leistungsverstärkung erzielt werden.

Für die Verstärkung von Wechselspannungen hoher Frequenz ist die

Basisschaltung am geeignetsten, da infolge der zwei pn-Übergänge die kapazitive Kopplung zwischen Eingang und Ausgang gering und damit die Grenzfrequenz

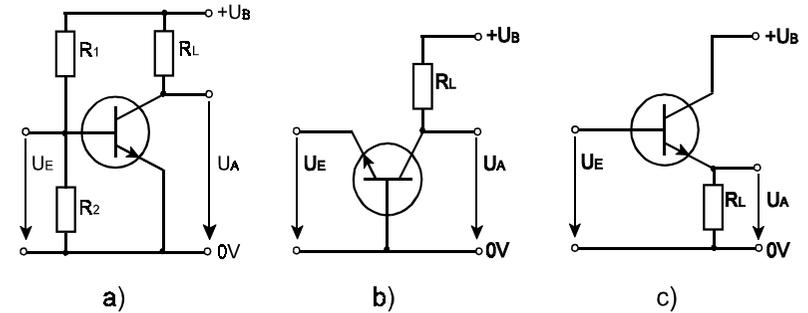


Abb. 2: npn-Transistorverstärker-Grundsaltungen: a) Emitterschaltung, b) Basisschaltung, c) Kollektorschaltung

für die Verstärkung hoch ist. Die Kollektorschaltung wird zur Anpassung als Impedanzwandler benutzt, da sie einen hohen Eingangs- und niedrigen Ausgangswiderstand besitzt.

Im folgenden wie auch in den durchzuführenden Experimenten wird lediglich die Emitterschaltung näher betrachtet.

## 2.3 Einstufiger Verstärker in Emitterschaltung

Abb.3 zeigt das Schaltbild eines einstufigen Transistorverstärkers in Emitterschaltung. Zum Betrieb des Si-Transistors ist auf der Eingangsseite (für geringe Spannungen  $U_E$ ) lediglich eine kleine Gleichspannung  $U_{BE0}$  (ca. 0,7 V) zur

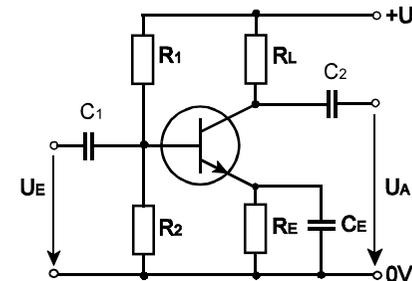


Abb. 3 Einstufiger Transistorverstärker in Emitterschaltung

Einstellung des Basisruhestroms  $I_{B0}$  nötig. Diese wird über den Spannungsteiler  $R_1/R_2$  aus der Betriebsspannung entnommen. Die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  sind so zu bemessen, dass durch sie ein 5 bis 10 mal höherer Strom als der Basisstrom fließt. Auf diese Weise wird der Arbeitspunkt stabilisiert, d.h.  $U_{BE0}$  ist weitgehend unabhängig von  $I_B$ .

Für die Kollektor-Emitter-Strecke ist im Kurzschlussbetrieb des Transistors (z.B. zur Bestimmung seiner Kennlinien) lediglich eine Spannung  $U_{CE}$  etwas größer als die Spannung  $U_{Rest}$  nötig. Da jedoch Spannungs- als auch Leistungsverstärkung nur in Verbindung mit dem entsprechend dimensionierten Lastwiderstand  $R_L$  im Kollektorkreis möglich ist, muss die Betriebsspannung  $U_B$  mindestens um den Betrag  $I_C R_L$  größer als  $U_{CE}$  sein.

Aus den Bemerkungen zur Kennlinie  $I_C(U_{CE})$  im Abschnitt 2.1 folgt ferner: Je größer die Spannungsverstärkung, d.h. bei gegebener Änderung der Eingangsspannung  $\Delta U_E$  die Änderung der Ausgangsspannung  $\Delta U_A = \Delta U_{CE}$  sein soll, desto größer muss der Widerstand  $R_L$  und gegebenenfalls die Betriebsspannung  $U_B$  gewählt werden. Zur Vermeidung von nichtlinearen Verzerrungen der Ausgangsspannung ist sicherzustellen, dass die minimale Ausgangsspannung deutlich größer als die Spannung  $U_{Rest}$  ist (s. Abb. 1).

Hinsichtlich der thermischen Stabilität des Transistors ist es günstig, den Arbeitspunkt A (s. Abb. 1) so einzustellen, dass  $U_{CE} \approx \frac{1}{2} U_B$  ist, d.h. dass der Lastwiderstand  $R_L$  etwa dem statischen Ausgangswiderstand des Transistors  $R_a = U_{CE}/I_C$  entspricht. Infolge der Jouleschen Verlustleistung der Kollektor-Emitterstrecke  $P_V = R_a I_C^2$  erwärmt sich zwangsläufig der Transistor. Die Erwärmung ist abhängig von der Montage auf einem entsprechend der Verlustleistung dimensionierten Kühlblech. Infolge der Erwärmung nimmt der Widerstand  $R_a$  des Halbleiters ab. Für  $R_a < R_L$  nimmt damit auch die Verlustleistung  $P_V$  ab (Man überprüfe dies durch die Berechnung der Ableitung  $dP_V/dR_a$ ). Infolgedessen wird die Temperaturerhöhung des Transistors begrenzt bzw. seine Temperatur einigermaßen stabilisiert.

Viel wirksamer zur Stabilisierung des Arbeitspunktes bzw. der Temperatur des Transistors ist der Widerstand  $R_E$  in der Emitterzuleitung, Abb. 3. Infolge der Erwärmung des Transistors erhöht sich bei konstanter Spannung  $U_{BE}$  der Basisstrom  $I_B$  und damit der Kollektorstrom  $I_C$ . Die Temperaturabhängigkeit  $I_B(T)$  ist vergleichbar mit der einer HL-Diode in Flussrichtung (s. Abb. 4 in Versuch C11: *Kennlinien von HL-Diode und Transistor*). Dort ist der Kennlinienvorfaktor  $j_R(0) \sim n_i^2$ , bzw. mit Gl. (2)  $\sim \exp(-\Delta W/kT)$ . Infolge des erhöhten Stroms  $I_B$  bzw.  $I_C$  erhöht sich entsprechend  $I_E$  und damit der Spannungsabfall am Widerstand  $R_E$ . Dies bewirkt eine Verkleinerung der Basis-Emitter-Spannung  $U_{BE}$  und damit eine

entsprechende Reduzierung des Basisstroms  $I_B$ . Man nennt dieses sehr wirksame Verfahren zur thermischen Stabilisierung des Arbeitspunktes  $I_{B0}$  bzw.  $I_{C0}$  *Stromgegenkopplung*.

Wird die Transistorschaltung zur Verstärkung von Wechselspannungen benutzt, ist es zweckmäßig, die Eingangs- und gegebenenfalls die Ausgangsspannung durch Kondensatoren ( $C_1$  und  $C_2$  in Abb. 3) von den Gleichspannungen des Verstärkers zu entkoppeln. Der in Schaltung Abb. 3 zum Widerstand  $R_E$  parallel geschaltete Kondensator stellt bei einer der Frequenz der Wechselspannung angepassten Dimensionierung einen Kurzschluss des Signals in der Emitterzuleitung dar. Er bewirkt daher, dass die Stromgegenkopplung lediglich für den Emittergleichstrom, nicht jedoch für den Wechselstromanteil wirksam ist.

### 2.4 Zweistufiger Verstärker in Emitterschaltung

Reicht die erreichbare maximale Verstärkung einer Verstärkerstufe für die gewünschte Anwendung nicht aus, oder ist der einstufige Verstärker hinsichtlich seiner Übertragereigenschaften (z. B. Linearität des verstärkten Signals) nicht ausreichend, so können durch die Hintereinanderschaltung mehrerer Verstärkerstufen die Eigenschaften des Verstärkers entsprechend verbessert werden.

Die Ankopplung des Ausgangs einer Verstärkerstufe an den Eingang der nachfolgenden kann auf verschiedene Weise erfolgen: Für die Verstärkung von Gleichspannungen erfolgt sie galvanisch direkt mittels eines ohmschen Widerstandes, für die von Wechselspannungen entweder induktiv mittels eines Transformators oder kapazitiv mittels eines Kondensators.

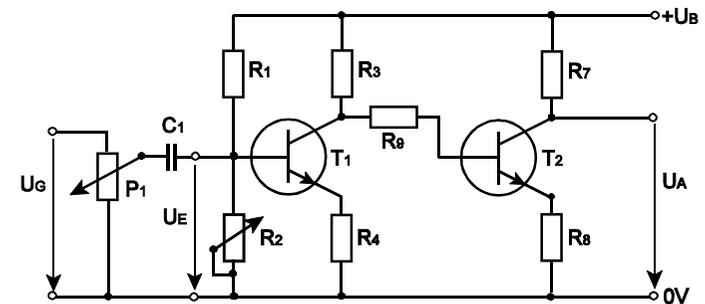


Abb. 4: Schaltbild des zweistufigen, galvanisch direkt gekoppelten Transistorverstärkers

Abb. 4 zeigt die Schaltung eines zweistufigen, galvanisch direkt gekoppelten Transistorverstärkers, der sowohl für die Verstärkung von Gleich- als auch Wechselspannungen geeignet ist. Mittels des Spannungsteilers  $R_1/R_2$  wird der Arbeitspunkt des Transistors  $T_1$  bzw. die statische Eingangsgleichspannung  $U_E$  des Verstärkers eingestellt. Die durch Verändern der Einstellung des Widerstands  $R_2$  oder durch eine von außen angelegte Spannung bewirkte Erhöhung  $\Delta U_E$  der Eingangsspannung wirkt unabhängig von der Einstellung des Arbeitspunkts wie eine zusätzliche Gleichspannung am Eingang. Diese wird durch eine entsprechende Erhöhung der Gleichspannung  $\Delta U_A$  am Ausgang deutlich. Aus dieser kann die Gleichspannungsverstärkung  $V_U = \Delta U_A / \Delta U_E$  berechnet werden.

Die Kopplung der Ausgangsspannung der ersten Verstärkerstufe zum Eingang der zweiten geschieht durch den Widerstand  $R_9$ . Durch diesen wird zugleich die Einstellung des Arbeitspunkts des Transistors  $T_2$  vorgenommen.

Die Schaltung, Abb. 4, ist auch zur Verstärkung von Wechselspannungen geeignet. Im vorliegenden Versuch wird mit dem Potentiometer  $P_1$  ein Teil der vom Funktionsgenerator gelieferten Spannung  $U_G$  über den Kondensator  $C_1$  auf den Verstärkereingang gelegt.

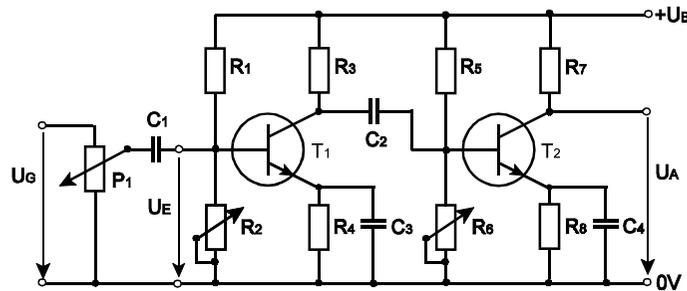


Abb. 5: Schaltbild des zweistufigen, kapazitiv gekoppelten Transistorverstärkers

Der kapazitiv gekoppelte Wechselspannungsverstärker (Schaltung Abb. 5) unterscheidet sich nur wenig vom direkt gekoppelten Verstärker. Hierbei sind lediglich der Widerstand  $R_9$ , Abb. 4, durch den Kondensator  $C_2$  ersetzt und der Spannungsteiler  $R_5/R_6$  zur Einstellung der Basisgleichspannung von Transistor  $T_2$  eingefügt. Außerdem sind die Kondensatoren  $C_3$  und  $C_4$  parallel zu den Emitterwiderständen  $R_4$  und  $R_8$  geschaltet, um die Wechselstromgegenkopplung für die Transistoren  $T_1$  und  $T_2$  kurzzuschließen bzw. zu reduzieren.

### 3. Aufgabenstellung

1. Aufgabe: Bauen Sie einen einstufigen Transistorverstärker auf und untersuchen Sie seine Eigenschaften.
2. Aufgabe: Bauen Sie einen zweistufigen, direkt gekoppelten Transistorverstärker auf und bestimmen Sie die Verstärkung von Gleich- und Wechselspannungen.
3. Aufgabe: Bauen Sie einen zweistufigen kapazitiv gekoppelten Transistorverstärker auf und bestimmen Sie die Verstärkung von Wechselspannungen verschiedener Frequenzen.

### 4. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Abb. 6 zeigt den Versuchsaufbau zur Bestimmung der Eigenschaften des einstufigen Verstärkers.

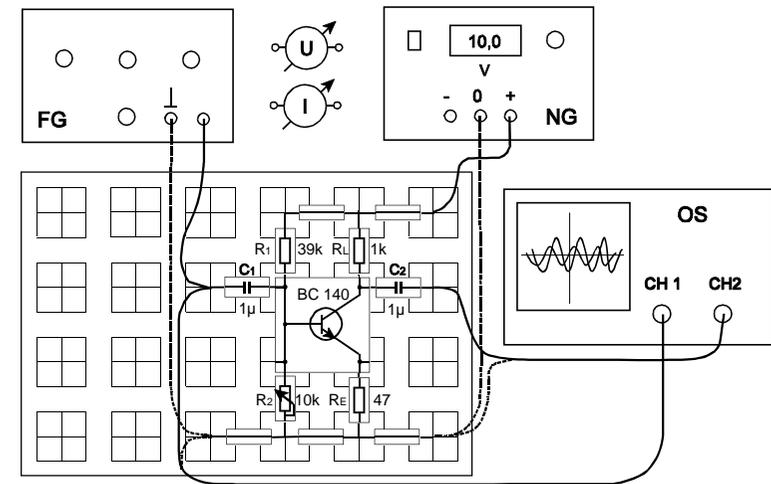


Abb. 6: Versuchsaufbau: Einstufige Verstärkerschaltung mit Transistor BC 140 auf Steckbrett, Funktionsgenerator FG, DC-Netzgerät NG, Zwei-Kanal-Oszilloskop OS, analoge Spannungs- und Strommesser

Auf einem Steckbrett sind Quadrate gezeichnet, deren Mittel-, Eck- und Seitenmittelpunkte Steckbuchsen haben, die innerhalb eines Quadrats jeweils leitend verbunden sind. Mit größeren steckbaren Kästen (Transistor BC 140,

Potentiometer 100k) sowie den Widerstands-, Kondensator- und Kurzschlusssteckern werden die Verstärker-Schaltungen des Versuchs gemäß den Schaltungen, Abb. 3, 4 und 5 aufgebaut.

Der Funktionsgenerator FG dient zur Bereitstellung von Sinus-Wechselspannungen variabler Amplitude und Frequenz für die Verstärkereingänge. Das Netzgerät NG liefert die einstellbare stabilisierte Gleichspannung  $U_B = 10\text{ V}$ . Zur Bestimmung der Amplituden  $U_S$  bzw. doppelten Amplituden  $U_{SS}$  sowie der Kurvenform und Phasenlage von Eingangs- und Ausgangsspannung dient ein Zweistrahl-Oszilloskop OS. Die Eingangsspannung  $U_E$  des jeweiligen Verstärkers wird mit Kanal I (CH I) registriert, der zugleich das Triggersignal liefert. Die Ausgangsspannung  $U_A$  wird mit Kanal II (CH II) gemessen bzw. aufgezeichnet. Die Messleitungen zum Oszilloskop sind Koaxialleitungen (Die Masse- bzw. Abschirmleitungen sind zur Unterscheidung in Abb. 6 punktiert gezeichnet). Zur Messung von Gleich- oder Wechselspannungen bzw. -strömen (Effektivwerte) der Ein- und Ausgänge stehen zusätzlich zwei Analog-Vielfachmessinstrumente zur Verfügung.

Machen Sie sich - sofern nicht schon geschehen - unbedingt mit der Bedienung bzw. mit der für die jeweilige Messung optimalen Einstellung des Oszilloskops vertraut! Fragen Sie gegebenenfalls Ihren stud. Betreuer bzw. Dozenten.

#### 4.1 Einstufiger Verstärker

Bauen Sie die Schaltung des einstufigen Transistorverstärkers, Abb. 3 bzw. Abb. 6 auf dem Steckbrett auf. Lassen Sie zunächst den Kondensator  $C_E = 4,7\ \mu\text{F}$  in der Emitterzuleitung weg.

Legen Sie die Betriebsspannung an und messen sie die Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{CE}$  mit dem Spannungsmesser. Stellen Sie mit dem variablen Widerstand  $R_2 = 10\text{ k}$  max. den Arbeitspunkt so ein, dass  $U_{CE} = 5\text{ V}$  beträgt.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Widerstandswert  $R_2$  und der Spannung  $U_{CE}$ ?

Bestimmen Sie Spannungs-, Strom- und Leistungsverstärkung der Schaltung. Schließen Sie dazu den Funktionsgenerator an und stellen Sie ihn so ein, dass  $U_{ESS} = 200\text{ mV}$  bei  $50\text{ Hz}$  (mit dem Oszilloskop gemessen) beträgt.

Bestimmen Sie mit dem Oszilloskop die Ausgangsspannung  $U_{ASS}$  und berechnen Sie aus dem Ergebnis die Spannungsverstärkung  $V_U = U_{ASS}/U_{ESS}$ .

Schalten Sie den Strommesser in Reihe mit dem Funktionsgenerator und messen Sie den Eingangswechselstrom  $I_{Eeff}$  ( $\mu\text{A}$ ). Dabei ist die Eingangsspannung  $U_{ESS}$

gegebenenfalls auf den Wert  $200\text{ mV}$  nachzustellen. Bestimmen Sie mit dem Oszillogramm der Ausgangsspannung und dem Wert des Kollektorwiderstands ( $R_L = 1\text{ k}$ ) den Kollektorwechselstrom. Beachten Sie hierbei (wie schon zuvor bemerkt), dass die Gleichspannungsquelle einen Wechselstromkurzschluss darstellt. Berechnen Sie hieraus die Stromverstärkung  $V_I = I_{Aeff}/I_{Eeff}$  und mit dem Ergebnis für  $V_U$  die Leistungsverstärkung  $V_P$ .

Ermitteln Sie den Einfluss des Kollektor-Lastwiderstands  $R_L$ , indem Sie den  $1\text{ k}$ -Widerstand durch einen  $1,5\text{ k}$ -Widerstand ersetzen. Stellen Sie den Arbeitspunkt wieder auf  $U_{CE} = 5\text{ V}$  ein. Bestimmen Sie wie zuvor Spannungs-, Strom- und Leistungsverstärkung und beschreiben Sie mit dem Ergebnis die Abhängigkeit der Verstärkungen von  $R_L$ .

Untersuchen Sie den Einfluss des in Abb.3 parallel zum Emitterwiderstand  $R_E = 47\ \Omega$  geschalteten Kondensators  $C_E = 4,7\ \mu\text{F}$  auf die Verstärkung. Stellen Sie dazu die Eingangsspannung  $U_{ESS}$  auf ca.  $200\text{ mV}$  ein und bestimmen Sie die Ausgangsspannung  $U_{ASS}$  jeweils zunächst ohne, dann mit dazu geschaltetem Kondensator für die Frequenzen  $100\text{ Hz}$ ,  $1\text{ kHz}$  und  $10\text{ kHz}$ . Begründen Sie das Ergebnis hinsichtlich der Frequenzabhängigkeit der Spannungsverstärkung.

#### 4.2 Zweistufiger, direkt gekoppelter Verstärker

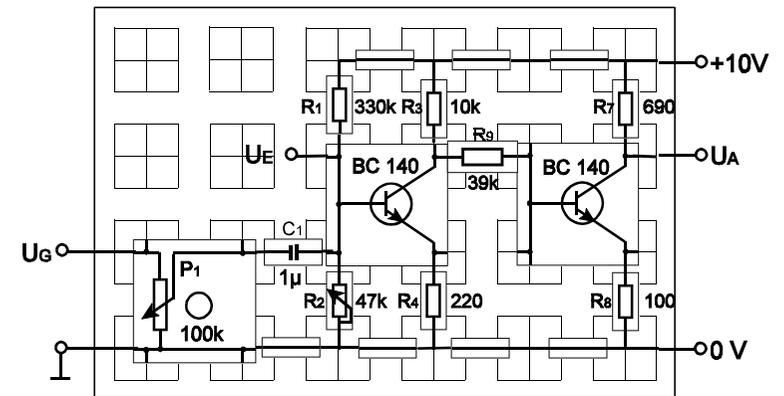


Abb. 7: Schaltung des zweistufigen, direkt gekoppelten Transistorverstärkers auf dem Steckbrett.

Bauen Sie die Schaltung gemäß Abb. 4 bzw. Abb. 7 auf dem Steckbrett auf. Stellen Sie den Widerstand  $R_7 = 690\ \Omega$  durch die Parallelschaltung der

Widerstände 2,2 k und 1 k her. Stellen Sie mit dem veränderlichen Widerstand  $R_2$  (47 k max.) die Eingangsgleichspannung  $U_E$  bzw. den Arbeitspunkt des ersten Transistors so ein, dass die Ausgangsgleichspannung  $U_A = 5$  V beträgt. Messen Sie die für diese Ausgangsspannung erforderliche Eingangsspannung  $U_E$ .

#### 4.2.1 Gleichspannungsverstärkung

Erhöhen Sie durch Verändern des Widerstands  $R_2$  die Eingangsspannung um  $\Delta U_E = 20, 35, 50$  und  $65$  mV und bestimmen Sie die jeweils resultierende Erhöhung  $\Delta U_A$  der Ausgangsspannung. Berechnen Sie die für jede Spannungserhöhung  $\Delta U_E$  resultierende Gleichspannungsverstärkung  $V_U = \Delta U_A / \Delta U_E$ .

#### 4.2.2 Wechselspannungsverstärkung

Stellen Sie zur Bestimmung der Wechselspannungsverstärkung des Verstärkers die Eingangsgleichspannung wieder so ein, dass die Ausgangsgleichspannung 5 V beträgt. Trennen Sie die analogen Spannungsmesser vom Verstärker und schließen Sie das Oszilloskop an den Eingang  $U_E$  und Ausgang  $U_A$  des Verstärkers an.

Schließen Sie nun den Funktionsgenerator an den Eingang  $U_G$  des Verstärkers an. Stellen Sie die Frequenz  $f = 1$  kHz ein und wählen Sie die Amplitude der Sinus-Ausgangsspannung des Generators so, dass durch Verstellen des Potentiometers  $P_1$  die Eingangsspannungen  $U_{ESS} = 20, 30, 50, 70$  und  $100$  mV bequem eingestellt werden können. Bestimmen Sie für diese Eingangsspannungen die jeweils resultierende Ausgangsspannung  $U_{ASS}$  und daraus die Wechselspannungsverstärkung  $V_U$ .

Vergleichen Sie Verstärkung des direkt gekoppelten Verstärkers für Gleich- und Wechselspannungen. Wie kann das Verhalten des Verstärkers bezüglich Gleich- und Wechselspannungen unterschiedlich gemacht werden?

Überbrücken Sie dazu die Widerstände  $R_3, R_4, R_7, R_8, R_9$  nacheinander mit einem  $1\mu\text{F}$ -Kondensator und stellen Sie fest, wie sich bei fester Eingangsspannung  $U_{ESS}$  die Ausgangsspannung  $U_{ASS}$  ändert. Bei welchen Widerständen ändert sich die Verstärkung besonders stark und warum?

#### 4.3 Zweistufiger, kapazitiv gekoppelter Verstärker

Bauen Sie die Schaltung des kapazitiv gekoppelten Verstärkers, Abb. 5 bzw. Abb.8, auf dem Steckbrett auf, indem Sie die bestehende Schaltung entsprechend ändern. Ersetzen Sie den 39 k-Widerstand zwischen  $T_1$  und  $T_2$  durch den Kondensator  $C_2 = 1\mu\text{F}$  und stecken Sie die Widerstände  $R_5 = 39$  k und  $R_6 = 10$  k max. zur Einstellung der Basisgleichspannung von  $T_2$  ein. Versetzen Sie die Emitterwiderstände  $R_4$  und  $R_8$  um je einen Platz links und schalten Sie die beiden

Kondensatoren  $C_3 = 1\mu\text{F}$  und  $C_4 = 4,7\mu\text{F}$  jeweils parallel dazu.

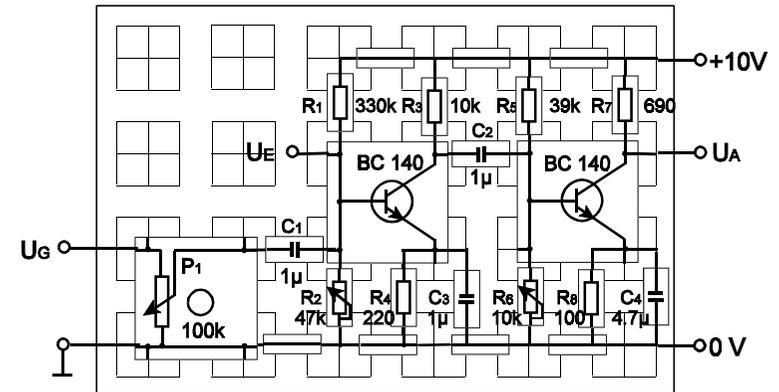


Abb. 8: Schaltung des zweistufigen, kapazitiv gekoppelten Transistorverstärkers auf dem Steckbrett

Stellen Sie mit den Basiswiderständen  $R_2$  und  $R_6$  die Arbeitspunkte der beiden Transistoren so ein, dass die Kollektorspannung (gegen Masse gemessen) jeweils 5 V beträgt.

Stellen Sie die Frequenz des Funktionsgenerators auf 50 Hz und seinen Ausgang sowie das Potentiometer  $P_1$  auf eine Eingangsspannung  $U_{ESS} = 300$  mV ein. Bestimmen Sie den Eingangswiderstand für Wechselstrom  $r_E = U_E / I_E$ , indem Sie  $I_{Eeff}$  mit den zwischen  $P_1$  und  $C_1$  geschalteten Strommesser (100µA-Bereich) bestimmen. Der Eingangswiderstand  $r_E$  ist über einen großen Bereich der Eingangsspannung und Frequenz nahezu konstant.

Nehmen Sie den Strommesser aus der Schaltung und stellen Sie die Eingangsspannung  $U_{ESS}$  auf 20 mV, 1 kHz. Berechnen Sie den nun viel kleineren Eingangsstrom  $I_{ESS} = U_{ESS} / r_E$ .

Bestimmen Sie die Kollektorspannung  $U_{C1SS}$  des ersten Transistors und  $U_{C2SS} = U_{ASS}$  des zweiten. Bestimmen Sie die jeweilige Spannungsverstärkung  $V_{U1,2}$  und die Gesamtspannungsverstärkung  $V_U$ .

Bestimmen Sie mit der Ausgangsspannung  $U_{ASS}$  und dem Kollektorwiderstand  $R_7$  den Ausgangsstrom  $I_{ASS}$  und daraus die Stromverstärkung  $V_I = I_{ASS} / I_{ESS}$ . Ermitteln Sie die Leistungsverstärkung  $V_P$  der Schaltung. Diskutieren Sie das Ergebnis Ihrer Messungen.

Bestimmen Sie nun die Spannungsverstärkung  $V_U$  durch Messen der Ausgangsspannung  $U_{ASS}$  bei fester Eingangsspannung  $U_{ESS} = 20 \text{ mV}$  für die Frequenzen:

$f = 50, 100, 300 \text{ Hz}$  sowie  $1, 3, 10$  und  $20 \text{ kHz}$

Stellen Sie gegebenenfalls die Eingangsspannung nach. Reduzieren Sie die Eingangsspannung, falls das Ausgangssignal zu groß oder verzerrt ist. Gelegentlich kann auch das Signal verrauscht bzw. mit Schwingungen überlagert sein. Entfernen Sie wechselweise eine der Abschirmungen der Signalleitungen zum Oszilloskop (Vermeidung von Erdungsschleifen) oder versuchen Sie durch Parallelschalten eines Kondensators  $C' = 10 \text{ nF}$  zum Basiswiderstand  $R_6$  die Schwingungen zu reduzieren.

Wiederholen Sie die Messung des Frequenzgangs, nachdem Sie die Kondensatoren  $C_3$ ,  $C_4$  und  $C'$  aus der Schaltung entfernt haben.

Tragen Sie  $V_U$  über der Frequenz  $f$  auf und diskutieren Sie das Frequenzverhalten der Spannungsverstärkung für beide Fälle.

## 5. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie ist ein npn-Transistor aufgebaut? Aus welchem Halbleitermaterial besteht er? Was bewirken die pn-Übergänge? Auf welche Weise kann mit einem Transistor ein Strom gesteuert werden?
- 2) Welchen Verlauf zeigen die Kennlinien  $I_B(U_{BE})$ ,  $I_C(I_B)$  und  $I_C(U_{CE})$ ?
- 3) Welche Grundschaltungen von Transistorverstärkern gibt es? Welche sind ihre hinsichtlich der Anwendung spezifischen Eigenschaften?
- 4) Wie ist die statische Stromverstärkung  $B$ , wie die dynamische  $\beta$  definiert?
- 5) Beschreiben Sie die einstufige Emitterschaltung eines Transistor-Spannungsverstärkers. Wodurch ist der Arbeitspunkt festgelegt? Wie kann die Spannungs- bzw. Leistungsverstärkung einer Schaltung vergrößert werden?
- 6) Wie kann der Arbeitspunkt thermisch stabilisiert werden?
- 7) Wie unterscheidet sich ein mehrstufiger Transistorverstärker von einem einstufigen in der Wirkungsweise? Wie können die Verstärkerstufen mit einander gekoppelt sein?

## Versuch C14: Operationsverstärker

**1. Literatur:** W. Walcher, Praktikum der Physik

**Stichworte:** Eigenschaften des unbeschalteten OP, Rückkopplung, parametrischer Verstärker, (nicht)invertierender Verstärker, Impedanzwandler, Addierer, Subtrahierer, Differenzierer, Integrierer, Zeitverhalten durch äußere Beschaltung

### 2. Grundlagen

Ein Operationsverstärker (OP) besteht aus der in einem Chip integrierten Zusammenschaltung mehrerer gleichstromgekoppelter Transistoren. Ein OP hat ohne äußere Beschaltung eine extrem hohe Leerlauf-Spannungsverstärkung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal (bis zu  $10^5$ ). Wesentlich für die Eigenschaften eines OP sind darüber hinaus der sehr hohe Widerstand seiner Eingänge (einige MOhm), d.h. die zur Verstärkung erforderlichen Ströme des Eingangssignals sind sehr gering (einige nA), sowie der relativ niedrige Ausgangswiderstand (einige 10 Ohm).

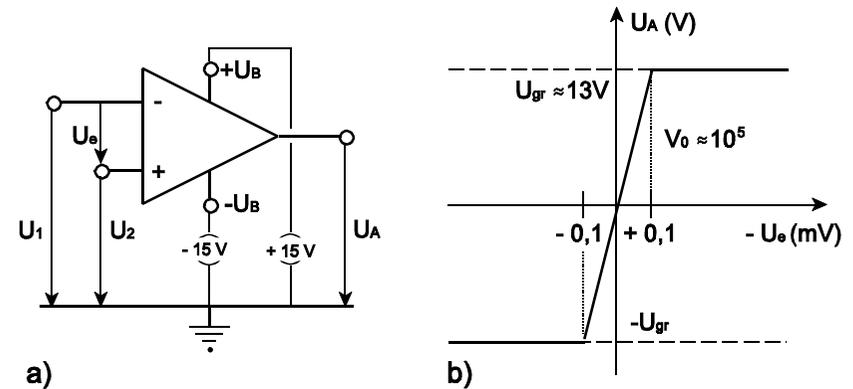
Der OP ist daher sehr gut als Bauelement in elektronischen Schaltungen geeignet, bei denen Eigenschaften wie z.B. die Spannungsverstärkung aber auch die allgemeine Umformung von Signalspannungen wie -strömen nicht durch die Eigenschaften des Verstärker-Chips selbst, sondern lediglich durch seine äußere Beschaltung, d.h. durch geeignete *Rückkopplung* zwischen Eingangs- und Ausgangsseite bestimmt werden.

Ein Operationsverstärker stellt damit einen sog. *parametrischen Verstärker* dar, bei dem die Verstärkereigenschaften durch die Parameter der äußeren Beschaltung festgelegt sind. Operationsverstärker wurden primär als analoge Rechenverstärker entwickelt, finden heute aber auch in der Digitaltechnik z.B. als Signalumformer Anwendung.

Abb. 1a zeigt das Schaltsymbol eines Operationsverstärkers, dessen funktionale Eigenschaften wie Addition, Subtraktion, Differenzation und Integration anhand verschiedener äußerer Beschaltungen im vorliegenden Versuch untersucht werden.

Der OP hat einen sog. *invertierenden Eingang* (-) mit Spannung  $U_1$ , einen *nichtinvertierenden Eingang* (+) mit Spannung  $U_2$  sowie einen *Ausgang* mit Spannung  $U_A$  jeweils gegen Masse. Zur Energieversorgung ist der Verstärker an ein Netzgerät mit stabilisierten Spannungen  $\pm 15$  V (gegen Masse) angeschlossen.

Die Spannung  $U_1$  des invertierenden Eingangs erzeugt eine um dem Faktor  $V_0$



**Abb. 1:** a) Schaltsymbol des Operationsverstärkers mit Anschlüssen der Eingänge  $U_{1,2}$ , des Ausgangs  $U_A$  sowie der Betriebsspannungen  $\pm U_B$ ; b) Kennlinie  $U_A(-U_e)$  des unbeschalteten Operationsverstärkers bei einer Leerlaufverstärkung  $V_0 \approx 10^5$  mit Grenzspannung  $U_{gr} \approx 0,9 U_B$

verstärkte Ausgangsspannung  $U_A$  umgekehrter Polarität, die Spannung  $U_2$  des nichtinvertierenden Eingangs eine um dem Faktor  $V_0$  verstärkte Spannung  $U_A$  gleicher Polarität. Dies bedeutet, dass die Ausgangsspannung  $U_A$  durch die Differenz  $U_e = U_1 - U_2$  der Eingangsspannungen und die Verstärkung  $V_0$  festgelegt ist:

$$U_A = -V_0 U_e = -V_0 (U_1 - U_2) \quad (1)$$

Abb. 1b zeigt die Kennlinie des unbeschalteten OP, die Ausgangsspannung  $U_A$  als Funktion der Spannungsdifferenz  $-U_e$  der Eingänge. Bei der hohen Verstärkung  $V_0$  von etwa  $10^5$  zwischen Eingangssignal  $-U_e$  und Ausgangssignal  $U_A$  reicht eine Eingangsspannung von ca.  $100 \mu\text{V}$  aus, um die maximale Ausgangsspannung  $\pm U_{gr}$  von ca. 90 % der Betriebsspannung zu erzeugen. Der OP dient ohne weitere Beschaltung lediglich als Komparator: Für  $U_1 > U_2$  ist  $U_A = -U_{gr}$ , für  $U_1 < U_2$  ist  $U_A = +U_{gr}$ .

Anmerkung: Da nicht Gegenstand des vorliegenden Versuchs, wird hier lediglich erwähnt, dass sowohl die Leerlauf-Verstärkung  $V_0$  als auch die Verstärkung  $V$  und die Phasendifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangssignal des beschalteten OP (s.u.) von der Frequenz  $\nu$  der Eingangsspannung abhängt. Unterhalb einer Grenzfrequenz  $\nu_g$  (V) ist  $V$  in etwa unabhängig von  $\nu$ , oberhalb  $\nu_g$  nimmt  $V$  etwa  $\sim \nu^{-1}$  ab.

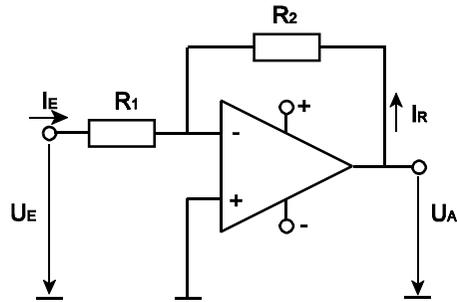


Abb. 2: Invertierender Verstärker

### 2.1 Invertierender Verstärker

Abb. 2 zeigt die Schaltskizze des beschalteten invertierenden OP. Das Eingangssignal  $U_E$  ist über den Widerstand  $R_1$ , der Verstärkerausgang  $U_A$  über den Widerstand  $R_2$  mit dem invertierenden Eingang (-) verbunden. Der nichtinvertierende Eingang (+) liegt an Masse. Da die Spannungsdifferenz  $U_c = U(-) - U(+)$  der Eingänge im Vergleich zur Ausgangsspannung  $U_A$  sehr gering ist, liegt der invertierende Eingang (-) im Vergleich zu  $U_E$  und  $U_A$  quasi auf Massepotential. Der Strom  $I_E$  ist damit  $U_E/R_1$ , der Strom  $I_R = U_A/R_2$ . Aufgrund des sehr geringen Eingangsstroms der Eingänge (-) und (+) gilt nach der Knotenregel ( $\Sigma I = 0$  an einem Knotenpunkt)  $I_E = -I_R$ . Hieraus folgt für die Verstärkung  $V$  des invertierenden OP:

$$V = \frac{U_A}{U_E} = - \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

Infolge der Gegenkopplung des Ausgangs auf den Eingang ist die Verstärkung vollständig durch die äußere Beschaltung (hier  $R_1$  und  $R_2$ ) festgelegt.

Anmerkung: Ist die Eingangsspannung  $U_E$  konstant, z.B. durch eine Zenerdiode stabilisiert, d.h. unabhängig vom Strom  $I_E$  infolge der Belastung mit dem Widerstand  $R_1$ , so ist  $I_E$  und damit  $I_R = U_A/R_2$  ebenfalls konstant. Die Schaltung, Abb. 2, stellt unter diesen Voraussetzungen eine mit  $R_1$  (bzw.  $R_2$ ) einstellbare *Konstantspannungsquelle*  $U_A$  bezüglich eines variablen Lastwiderstandes  $R_A$  dar. Zum anderen liefert die Schaltung einen konstanten Strom  $I_R = I_E$  durch einen variablen Lastwiderstand  $R_2 = R_L$ . Sie dient dann als *Konstantstromquelle*  $I_R$ .

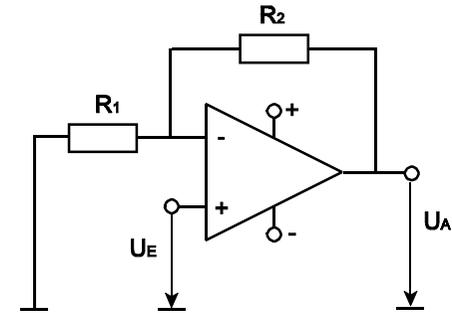


Abb. 3: Nichtinvertierender Verstärker

### 2.2 Nichtinvertierender Verstärker

Die Schaltung des nichtinvertierenden OP, Abb.3, ähnelt der von Abb. 2, nur dass hier  $R_1$  an Masse liegt und am nichtinvertierenden Eingang (+) die Eingangsspannung  $U_E$ . Aufgrund der geringen Spannung zwischen den Eingängen ist  $U(-) \approx U(+)$  und damit der Strom durch  $R_1$   $I_1 = U_E/R_1$ . Aufgrund des geringen Eingangsstroms fließt durch die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  der gleiche Strom, sie wirken als Spannungsteiler von  $U_A$ . Die Spannung  $U(-)$  ist daher  $R_1/(R_1 + R_2) U_A$ . Hieraus folgt für die Verstärkung  $V$  des nichtinvertierenden OP:

$$V = \frac{U_A}{U_E} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (3)$$

Anmerkung: Wird in der Schaltung des nichtinvertierenden Verstärkers der Ausgang mit dem invertierenden Eingang direkt verbunden ( $R_2 = 0$ ) und die Verbindung über  $R_1$  zu Masse weggelassen ( $R_1 \rightarrow \infty$ ), ist mit Gl. (3) die Verstärkung  $V = 1$ ,  $U_A = U_E$ . Die Schaltung arbeitet als sog. *Impedanzwandler*, da der Eingangswiderstand sehr hoch, der Ausgangswiderstand jedoch gering ist.

### 2.3 Addierer, Subtrahierer

Abb. 4 zeigt eine Kombination der Schaltungen Abb. 2 und 3: Zwei Eingangsspannungen  $U_1$  und  $U_2$  sind über die Widerstände  $R_1$  bzw.  $R_2$  auf den invertierenden Eingang (-) geschaltet, eine weitere Eingangsspannung  $U_3$  über den Spannungsteiler  $R_3 - R$  auf den nichtinvertierenden Eingang (+).

Nach dem zuvor angewandten Schema ergibt sich:  $U(+)$   $\approx$   $U(-) = R/(R+R_3) U_3$ .

- C14.5 -

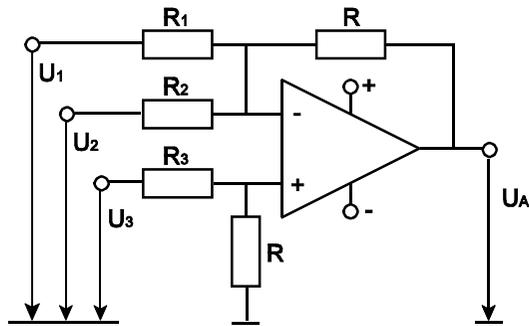


Abb. 4: Addierer bzw. Subtrahierer

Ferner ist  $I_1 \approx (U_1 - U(+))/R_1$ ,  $I_2 \approx (U_2 - U(+))/R_2$  und  $I_R \approx (U_A - U(+))/R$ . Mit der

Wahl  $R_1 = R_2 = R$  ergibt sich aus der Knotenregel  $I_1 + I_2 = -I_R$ :

$$U_1 + U_2 - 2U(+) \approx U(+) - U_A \quad \text{bzw.} \quad U_A \approx 3U(+) - (U_1 + U_2) \quad (4)$$

Mit der Wahl  $R_3 = 2R$  bzw.  $U(+)=U_3/3$  folgt:

$$U_A \approx U_3 - (U_1 + U_2) \quad (5)$$

Der Verstärker arbeitet in der Beschaltung Abb. 4 bei geeigneter Wahl der Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  u.  $R_3$  als Addierer bzw. Subtrahierer.

## 2.4 Differenzierer

In der Schaltung, Abb.5, ist anstelle des Widerstands  $R_1$  der Schaltung des invertierenden Verstärkers (Abb. 2) ein Kondensator der Kapazität  $C$  geschaltet.

Betrachtet wird zunächst die Schaltung ohne die gestrichelt gezeichneten Bauelemente  $R_1$  und  $C_1$ . Liegt eine zeitlich konstante Eingangsspannung  $U_E$  am Kondensator und ist dieser entsprechend der Beziehung  $Q = C U_E$  aufgeladen, dient der Kondensator als Gleichstromsperre des Eingangs und bewirkt, dass damit auch der Strom  $I_R$  des Ausgangs und die Spannung  $U_A$  Null ist.

Eine zeitlich variable Eingangsspannung  $U_E$  hat dagegen einen Lade- bzw. Entladestrom  $I_E$  des Kondensators zur Folge. Die zeitliche Ableitung der

- C14.6 -

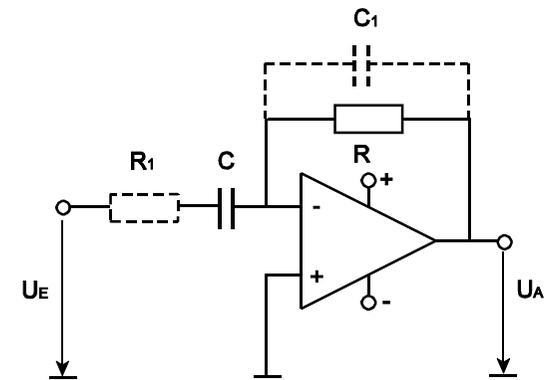


Abb. 5: Differenzierer

Beziehung  $Q = C U_E$  liefert:

$$I_E = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_E}{dt} = -I_R = -\frac{U_A}{R} \quad \text{bzw.} \quad U_A = -RC \frac{dU_E}{dt} \quad (6)$$

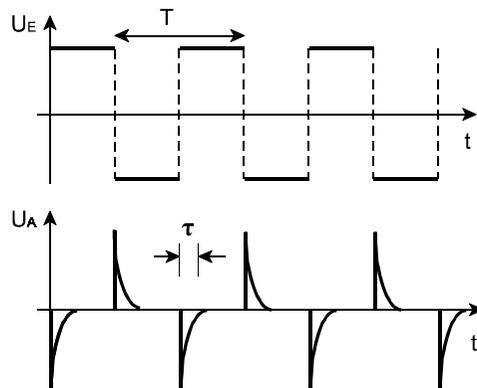
Die Ausgangsspannung  $U_A$  ist mit Gl. (6) proportional zur zeitlichen Änderung der Eingangsspannung  $U_E$ . Die Schaltung, Abb. 5, stellt einen *zeitlichen Differenzierer* dar.

Einschränkend muss bemerkt werden, dass die Ladung  $Q$  des Kondensators  $C$  sich nicht beliebig schnell mit einer sich ändernden Eingangsspannung  $U_E$  ändern kann. Der Auf- bzw. Entladestrom  $I$  des Kondensators ist durch den Widerstand  $R$  bzw. die maximale Ausgangsspannung  $U_{gr}$  begrenzt ( $I_{max} = U_{gr}/R$ ).

Das typische Zeitintervall für den Lade- bzw. Entladevorgang des Kondensators ist  $\tau = RC$ . In diesem Intervall ist der (mit  $e^{-t/\tau}$  abfallende) Lade- bzw. Entladestrom auf  $1/e$  (ca. ein Drittel) des Anfangswertes abgefallen. Für Zeitintervalle  $t > \tau$  ist daher die Ladung des Kondensators  $Q \approx C U_E$ . Eine strenge Proportionalität der Ausgangsspannung  $U_A$  zur zeitlichen Ableitung der Eingangsspannung  $U_E$  ist jedoch auf Spannungen mit Periodendauern  $T \gg \tau$  bzw. Frequenzen  $\nu \ll 1/\tau$  beschränkt.

Dies verdeutlicht Abb. 6. In ihr ist als Eingangsspannung  $U_E(t)$  eines als Differenzierer geschalteten OP eine Rechteckspannung der Grundfrequenz  $\nu$  bzw. Periode  $T$  dargestellt. Die Rechteckspannung enthält viele Oberwellen der

- C14.7 -

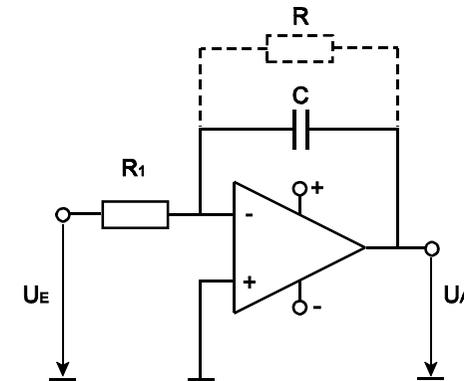


**Abb. 6:** Zeitverhalten der Ausgangsspannung  $U_A(t)$  beim Differenzierer für eine Rechteckspannung  $U_E(t)$  am Eingang.

vielfachen Frequenz  $n \cdot v$  (vergl. Versuch C3: *Fourieranalyse akustischer und elektrischer Schwingungen*). Die korrekte zeitliche Ableitung einer Rechteckspannung ist eine Spannung, die aus einer Reihe abwechselnd positiver und negativer  $\delta$ -Peaks bei den Sprungstellen der Rechteckspannung besteht. Die in Abb. 6 gezeigte Ausgangsspannung  $U_A(t)$  des Differenzierers besitzt zwar an den Sprungstellen der Rechteckspannung positive und negative Peaks mit jeweils (dem Betrage nach) steil ansteigender Flanke, dagegen eine lediglich mit der Zeitkonstanten  $\tau = RC$  exponentiell abfallende Flanke. Es ist daher im Einzelfall zu prüfen, inwieweit die Ausgangsspannung des Differenzierers die wahre zeitliche Ableitung der Eingangsspannung darstellt.

Anmerkung: Ein mit C in Reihe geschalteter Widerstand  $R_1$  ( $\ll R$ ) in der Schaltung des Differenzierers, Abb. 5, bewirkt, dass der Strom für hohe Frequenzen eingangsseitig begrenzt wird und der Betrag der maximalen Ausgangsspannung  $U_{Amax}$  unterhalb der Grenzspannung bleibt. Für kleine Frequenzen ist  $R_1 \ll R_C = 1/\omega C$ ; die Schaltung arbeitet als Differenzierer. Für große Frequenzen ist umgekehrt  $R_1 \gg R_C$ ; die Schaltung arbeitet dann als invertierender Verstärker ( $V = -R/R_1$ ). Eine weitere Aufgabe des Widerstands  $R_1$  ist die Veränderung der Phasendifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung. Diese beträgt für hohe Frequenzen bei der RC-Kombination am invertierenden Eingang nahezu  $2\pi$ , die Schaltung neigt daher zu Schwingungen. Der Kondensator  $C_1$  ( $\ll C$ ) parallel zu R vermindert (wie auch  $R_1$ ) das am Ausgang verstärkte Rauschen des Eingangs. Bei hoher Frequenz arbeitet die Schaltung dann als Integrierer (s.u.). Man dimensioniert  $R_1$  und  $C_1$  so, dass  $R_1 C = R C_1$ .

- C14.8 -



**Abb. 7:** Integrierer

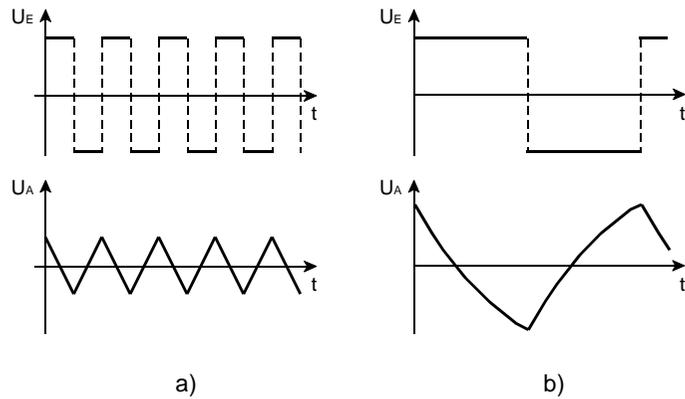
## 2.5 Integrierer

Abb. 7 zeigt die Schaltskizze des OP als Integrierer. Hier ist anstelle des Widerstands  $R_2$  beim invertierenden Verstärker (Abb. 2) ein Kondensator der Kapazität C zwischen invertierenden Eingang und Ausgang geschaltet, zusätzlich parallel dazu ein Widerstand  $R$  ( $\gg R_1$ ).

Liegt (für die Schaltung ohne R) am Eingang eine zeitlich konstante bzw. zeitlich variable positive Spannung  $U_E$ , so fließt ein konstanter bzw. zeitlich variabler positiver Strom  $I_E = U_E/R_1 = -I_C = -C dU_C/dt$ . Die Spannung am Kondensator  $U_C = U_A$  nimmt linear mit der Zeit bzw. stetig ab, bis sie die Grenzspannung  $-U_{gr}$  erreicht. Integration der Zeitabhängigkeit zwischen  $U_E$  und  $U_A$  liefert:

$$U_A = - \frac{1}{R_1 C} \int U_E dt + \text{const.} \quad (7)$$

Die Schaltung, Abb. 7, arbeitet als Integrierer. Zur Integration zeitabhängiger Signale wie Wechselspannungen verschiedener Frequenz ist es oft notwendig, selbst geringe Gleichspannungsanteile zu unterdrücken, da anderenfalls der Wert der Ausgangsspannung schnell den der Grenzspannung annimmt. Dies wird durch den Widerstand R parallel zu C erreicht. Für große Frequenzen ist  $R_C = 1/\omega C \ll R$ ; der Widerstand R kann vernachlässigt werden. Umgekehrt ist für Wechselspannungen geringer Frequenz bzw. Gleichspannungen  $R_C \gg R$ ; die Schaltung arbeitet dann als invertierender Verstärker der Verstärkung  $V = -R/R_1$ .



**Abb. 8:** Eingangssignal  $U_E$  der Rechteckspannung und Ausgangssignal  $U_A$  des Integrierers, Schaltung Abb.7: a) für große, b) für kleine Frequenzen schematisch

Abb.8 zeigt schematisch den frequenzabhängigen Einfluss des Widerstands  $R$  in der Schaltung des Integrierers, Abb. 7, auf den Zusammenhang zwischen Eingangsspannung  $U_E$  und Ausgangsspannung  $U_A$ . Für a) hohe Frequenzen der Rechteckspannung  $U_E(t)$  ist die maximale Ladung  $Q = C U_A$  des Kondensators und damit die Ausgangsspannung  $U_A$  klein gegenüber einer Maximalspannung  $U_E R/R_1$  und nahezu proportional zum zeitlichen Integral der Spannung  $U_E$ . Dagegen ist b) für niedrige Frequenzen die Ausgangsspannung  $U_A$  deutlich nichtlinear vom zeitlichen Integral der Spannung  $U_E$  abhängig.

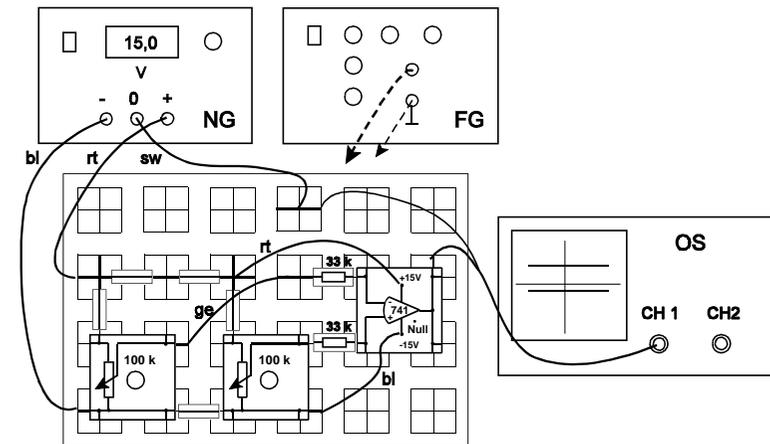
### 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bauen Sie die Schaltung des Operationsverstärkers als Komparator auf und untersuchen Sie dessen Funktionsweise.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie in der Schaltung des invertierenden OP die Verstärkung  $V$  sowie die Phasendifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangssignal für verschiedene Rückkopplungswiderstände  $R_2$ .
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Funktionsweise des nichtinvertierenden OP für verschiedene Kombinationen der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$

- 4. Aufgabe:** Untersuchen Sie die Funktion des OP als Differenzierer für verschiedene Kombinationen  $R, C, R_1, C_1$  bei Wechselspannungen verschiedener Frequenzen.
- 5. Aufgabe:** Untersuchen Sie die Funktionsweise des OP in der Schaltung als Integrierer für verschiedene Eingangssignale und Kombinationen der Widerstände/Kondensatoren.

### 4. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

#### 4.1 Komparator



**Abb. 9:** Genereller Versuchsaufbau (hier 1. Schaltung: Komparator auf Steckbrett) mit Netzgerät NG ( $\pm 15V$ ), Funktionsgenerator FG und Oszilloskop OS

Abb. 9 zeigt den generellen Versuchsaufbau, bestehend zunächst aus einem Steckbrett, auf dem die verschiedenen Schaltungen des Versuchs durch geeignete Positionierung der Schaltungselemente (OP 741 grundsätzlich mittig rechts) sowie ihrer Verbindungen durch Kurzschlussstecker oder Kabel realisiert werden können. (Das Steckbrett zeigt hier speziell die Schaltung des OP als Komparator). Zur Gleichspannungsversorgung dient ein Netzgerät NG ( $\pm 15V$  gegen Masse = 0), zur Versorgung der Verstärkereingänge mit Wechselspannungen variabler Frequenz und Signalform dient ein Funktionsgenerator FG, zur Aufzeichnung der Eingangs- bzw. Ausgangsspannung des OP wird ein Zweikanal-Oszilloskop OS

angeschlossen.

Benutzen Sie zur Verbindung der Bauelemente auf dem Steckbrett mit Kabeln (der Übersichtlichkeit halber!) möglichst kurze Laborkabel mit entsprechend kodierter Farbe der Isolierung: Rot für Versorgungsspannung + 15 V, schwarz für 0 V, blau für - 15 V, gelb für sonstige Signalspannungen. In Abb. 9 sind solche Kabel entsprechend mit rt, sw, bl, ge gekennzeichnet.

Das Oszilloskop ist das Messinstrument des vorliegenden Versuches. Machen Sie sich mit der Bedienung eines Oszilloskops zur möglichst genauen Bestimmung z.B. der Frequenz, der Spitzenspannungen  $V_S$  (Amplitude) bzw.  $V_{SS}$  (doppelte Amplitude) sowie zur Funktion der Triggerung eines Wechselspannungssignals unbedingt vertraut.

Variieren Sie die Einstellungen der beiden als Spannungsteiler zwischen + und - 15V geschalteten Potentiometer  $P_1$  und  $P_2$  für die über 33k-Widerstände angeschlossenen Eingänge (-) und (+) des OP. Prüfen Sie für mindestens 5 verschiedene Einstellungen der Potentiometer anhand der mit dem Oszilloskop bestimmten Eingangs- sowie Ausgangsspannung nach, ob bzw. inwieweit die Schaltung als Komparator funktioniert.

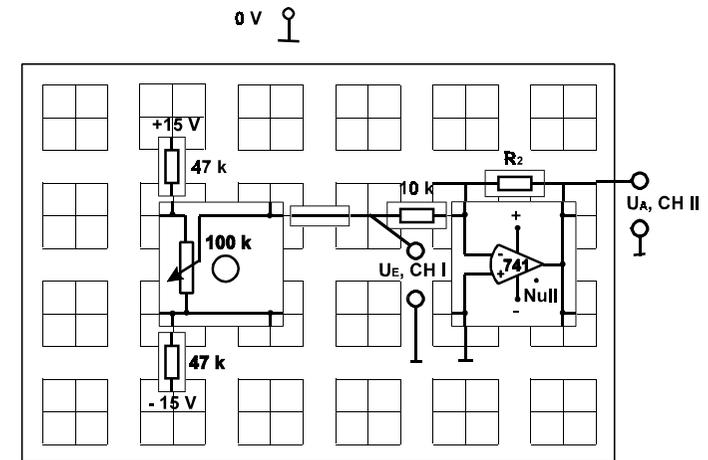
Schließen Sie anstelle des auf dem Schaltbrett in Abb. 9 unten mittig gezeigten Potentiometers  $P_2$  für den nicht invertierenden Eingang des OP den Signalausgang des Funktionsgenerators FG an (Masseleitung an Erde bzw. Null, schwarz). Bestimmen Sie mit dem an den Signaleingang der Schaltung bzw. an den Signalausgang des Funktionsgenerators angeschlossenen Kanal I des OS die Eingangsspannung und mit dem an den Signalausgang des OP angeschlossenen Kanal II des OS die Ausgangsspannung des OP für das Eingangssignal des FG:  $U_{2S} = 3V$  Sinus,  $\nu = 1$  kHz. Stellen Sie das Potentiometer  $P_1$  zunächst auf einen mittleren Wert ein.

Welche Form hat die Ausgangsspannung des OP? Was ändert sich bei der Variation des Potentiometers  $P_1$ ? Begründen Sie Ihre Beobachtung.

#### 4.2 Invertierender OP

Abb. 10 zeigt schematisch die Beschaltung des OP als invertierenden Verstärker. Die Verbindungen zum Netzgerät und Oszilloskop sind der Übersichtlichkeit weg gelassen bzw. nur angedeutet..

Bauen Sie die Schaltung mit  $R_2 = 33$  k auf und stellen sie mit dem 100 k - Potentiometer die Eingangsspannung  $U_E$  am Oszilloskop auf 0 V ein. Überprüfen Sie, ob auch die Ausgangsspannung  $U_A = 0$  V beträgt. (Gegebenfalls muss mit einem Schraubendreher der Trimmer (Null) im OP-Modul so verstellt werden, dass



**Abb 10:** Schaltung des invertierenden Operationsverstärkers mit Spannungsteiler zur Variation der Gleichspannung des Eingangs

$U_A = 0$  V wird.)

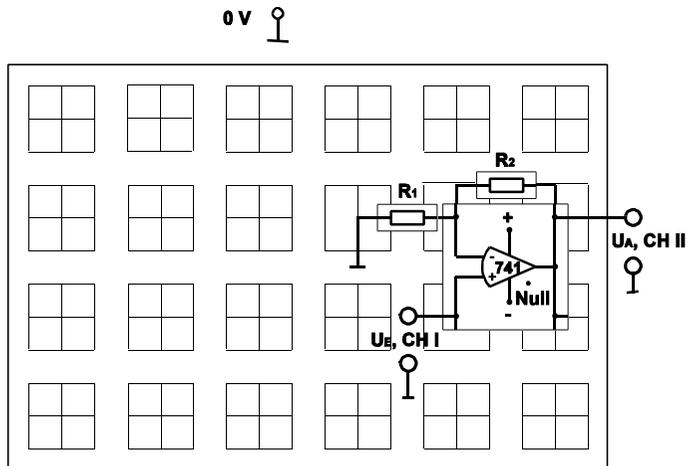
Bestimmen Sie mit Rückkopplungswiderständen  $R_2 = 33$  k, 10 k und 15 k für Eingangsspannungen  $U_E = -1,5$  V; -1,0 V; -0,5 V; ca. 0 V; 0,5 V; 1,0 V; 1,5 V die Ausgangsspannungen  $U_A$ . Stellen Sie eine Wertetabelle auf und bestimmen Sie die jeweilige Verstärkung des OP. Welche Beziehung besteht generell zwischen  $U_E$  und  $U_A$  (Gl. 2))?

Trennen Sie den Abgriff des Potentiometers vom 10k-Widerstand des invertierenden Verstärkereingangs und legen Sie an ihn mit dem Funktionsgenerator eine Wechselspannung  $U_{ES} = 1V$ ,  $\nu = 1$  kHz an. Bestimmen Sie  $U_E$  und  $U_A$  mit dem Oszilloskop. Welche Phasenlage hat  $U_A$  bezogen auf  $U_E$ ?

#### 4.3 Nichtinvertierender Verstärker

Abb. 11 zeigt schematisch die Schaltung des nichtinvertierenden Verstärkers auf dem Schaltbrett. Wie zuvor sind der Übersichtlichkeit halber die Verbindungen der Versorgungsspannungen und der Masseleitungen weggelassen, die Oszilloskopanschlüsse nur angedeutet.

Bauen Sie die Schaltung zunächst mit den Widerständen  $R_1 = R_2 = 10$  k auf. Legen Sie mit dem Funktionsgenerator eine Spannung mit dem (Spitze-Spitze)Wert  $U_{ESS} = 4$  V,  $\nu = 200$  Hz an den Eingang. Vergleichen Sie mit dem Oszilloskop die Spannungen  $U_E$  und  $U_A$ . Welche Phasenlage haben  $U_E$  und  $U_A$  zueinander?



**Abb. 11:** Schaltung des nichtinvertierenden Operationsverstärkers

Verändern Sie die Frequenz der Eingangsspannung und prüfen Sie, ob sich die Phasenlage von  $U_E$  zu  $U_A$  ändert. Beschreiben Sie die Funktion der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$ .

Ändern Sie die Eingangsspannung auf  $U_{ESS} = 1\text{ V}$ ,  $\nu = 1\text{ kHz}$ . Beschalten Sie den OP mit  $R_1 = 1\text{ k}$  und messen Sie mit dem Oszilloskop die Ausgangsspannung für die Widerstandswerte:

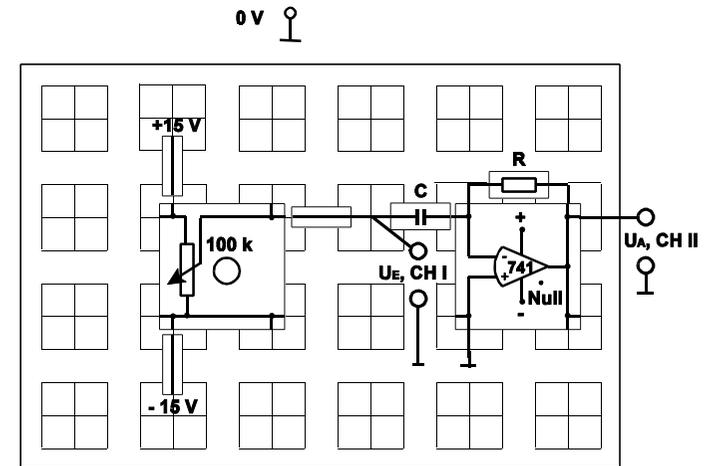
$R_2 = 0; 0,1\text{ k}; 0,47\text{ k}; 1,5\text{ k}; 2,2\text{ k}; 4,7\text{ k}; 10\text{ k}; 15\text{ k}$ .

Wiederholen Sie die Messreihe mit den Widerständen  $R_1 = 3,3\text{ k}$  und  $10\text{ k}$ .

Berechnen Sie die jeweilige Spannungsverstärkung  $V$ . Tragen Sie  $V$  als Funktion des Verhältnisses  $R_2/R_1$  getrennt für den jeweiligen Widerstand  $R_1$  auf. Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $V$  und  $R_2/R_1$ ? Vergleichen Sie diesen mit Gl. (3).

#### 4.4 Differenzierer

Abb. 12 zeigt die Ausgangsschaltung des Operationsverstärkers als Differenzierer wie zuvor schematisch. Bauen Sie die Schaltung mit  $R = 10\text{ k}$  und  $C = 1\text{ }\mu\text{F}$  auf. Legen Sie mit dem  $100\text{ k}$  - Potentiometer verschiedene Gleichspannungen an den Eingang. Messen Sie mit dem Oszilloskop die Ausgangsspannung. Begründen Sie das Messergebnis.



**Abb. 12:** Schaltung des Operationsverstärkers als Differenzierer mit Spannungsteiler zur Variation der Eingangsgleichspannung

Trennen Sie die Verbindung von Gleichspannungsquelle und Eingang und legen Sie anstelle eine Sinus-Wechselspannung mit  $U_{ESS} = 0,1\text{ V}$ ,  $\nu = 500\text{ Hz}$  an den Eingang. Beschreiben Sie das Ausgangssignal  $U_A$ .

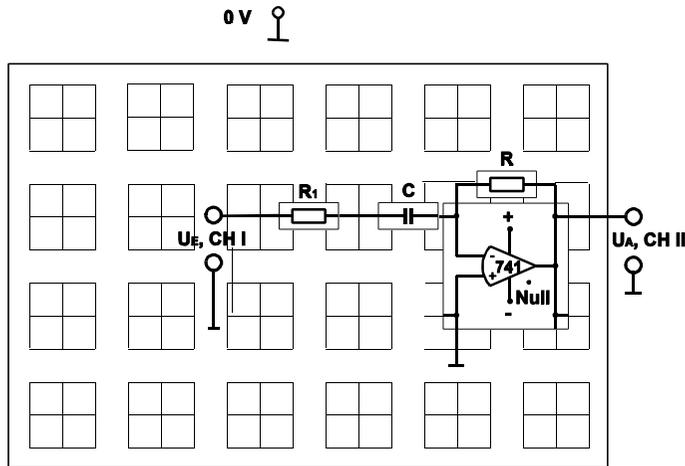
Überbrücken Sie den Widerstand  $R$  mit einem Kondensator  $C_1 = 10\text{ nF}$ . Wie hat sich der Kurvenzug der Ausgangsspannung geändert? Beschreiben Sie die Phasenlage von  $U_A$  bezogen auf  $U_E$ . Vergleichen Sie die Funktion des Differenzierers mit Gl. (6).

Entfernen Sie den  $10\text{ nF}$  - Kondensator wieder und ersetzen Sie  $R = 10\text{ k}$  durch  $R = 1\text{ k}$ . Legen Sie eine Dreiecksspannung  $U_{ESS} = 8\text{ V}$ ,  $\nu = 100\text{ Hz}$  an. Zeichnen Sie das Oszillogramm der Eingangs- und Ausgangsspannung. Erhöhen Sie die Frequenz der Eingangsspannung auf  $500\text{ Hz}$ . Wie ändert sich  $U_A$ ?

Bauen Sie die Schaltung entsprechend Abb. 13 mit  $R = 10\text{ k}$ ,  $R_1 = 1\text{ k}$  und  $C = 10\text{ nF}$  um und legen Sie eine rechteckförmige Eingangsspannung  $U_{ESS} = 2\text{ V}$ ,  $\nu = 500\text{ Hz}$  an.

Zeichnen Sie das Oszillogramm von  $U_E$  und  $U_A$ . Begründen Sie den Verlauf von  $U_A$  (Gl. (6)).

Erhöhen Sie die Frequenz des Eingangssignals auf  $5\text{ kHz}$  und beschreiben Sie die Änderung des Ausgangssignals. Erhöhen Sie die Frequenz auf  $\nu = 100\text{ kHz}$ . Welche Form hat die Ausgangsspannung nun?



**Abb. 13:** Geänderte Schaltung des Differenzierers mit Entkopplungswiderstand  $R_1$

Stellen Sie wieder eine Frequenz  $\nu = 500$  Hz ein und überbrücken Sie den Widerstand  $R_1$ . Beschreiben und begründen Sie die Änderung des Oszillogramms der Ausgangsspannung.

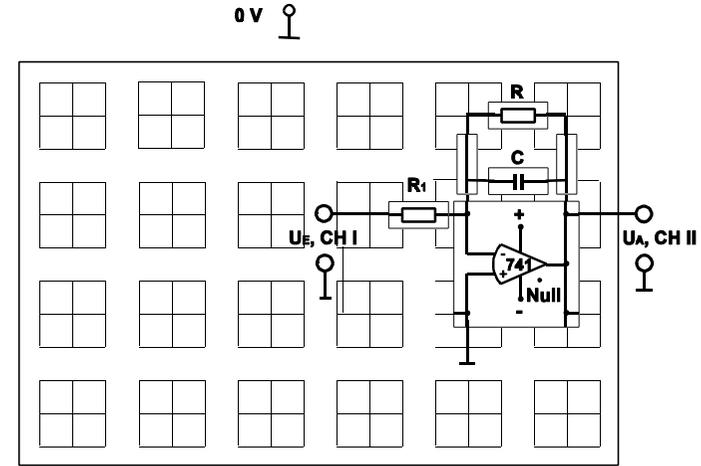
#### 4.5 Integrierer

Bauen Sie die Schaltung entsprechend Abb. 14 mit  $C = 10$  nF,  $R = 1$  M und  $R_1 = 10$  k auf. Legen Sie mit dem Funktionsgenerator eine rechteckförmige Wechselspannung mit  $U_{ESS} = 2$  V,  $\nu = 1$  kHz an den Eingang des Integrierers.

Zeichnen Sie das Oszillogramm von  $U_E$  und  $U_A$ . Begründen Sie den Verlauf von  $U_A$  (Gl. (7)).

Ändern Sie die Schaltung, Abb. 14, indem Sie den Kondensator  $C = 10$  nF durch einen mit  $C = 2,2$  nF ersetzen. Reduzieren Sie außerdem die Amplitude des Rechteck-Eingangssignals auf  $U_{ESS} = 200$  mV und die Frequenz auf  $\nu = 100$  Hz. Welchen Kurvenverlauf hat die Ausgangsspannung  $U_A$  nun? Welche Aufgabe hat der zu  $C$  parallel geschaltete Widerstand  $R$ ?

Bauen Sie wieder die ursprüngliche Schaltung Abb. 14 ( $C = 10$  nF,  $U_{ESS} = 2$  V,  $\nu = 1$  kHz) auf. Beobachten Sie  $U_A$ , wenn  $R$  herausgenommen wird. Wie verändert sich das Oszillogramm?



**Abb. 14:** Schaltung des Operationsverstärkers als Integrierer

Ändern Sie abermals die Schaltung, indem Sie wieder  $C = 2,2$  nF wählen und das Eingangssignal auf  $U_{ESS} = 2$  V,  $\nu = 1$  kHz Sinus umstellen. Zeichnen Sie das Oszillogramm von  $U_E$  und  $U_A$ . Vergleichen Sie den Zusammenhang von  $U_E$  und  $U_A$  mit Gl. (7).

#### 5. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche Eigenschaften hat ein unbeschalteter Operationsverstärker (OP) ?
- 2) Auf welche Weise kann ein OP für Rechenzwecke genutzt werden?
- 3) Beschreiben Sie die Schaltung eines invertierenden bzw. nichtinvertierenden OP und geben Sie die jeweilige Verstärkung  $V = U_A/U_E$  an.
- 4) Skizzieren Sie die prinzipielle Schaltung des OP als Addierer sowie Subtrahierer.
- 5) Beschreiben Sie die prinzipielle Schaltung und Wirkungsweise eines OP als Differenzierer sowie Integrierer.
- 6) Wie kann durch geeignete Beschaltung eines OP als Differenzierer bzw. Integrierer die „Übersteuerung“ des Ausgangssignals bei hohen bzw. niedrigen Frequenzen der Eingangsspannung vermieden werden?

## Versuch C 15: Digitale Schaltungen

**1. Literatur:** Walcher, Praktikum der Physik,  
Jean Pütz, Digitaltechnik

**Stichworte:** Binärzahlen, logische Verknüpfungen, Wahrheitstabelle, Kippschaltungen (Flip-Flop), Dualzähler, Frequenzteiler

### 2. Grundlagen

Die in diesem Versuch aufzubauenden digitalen Schaltungen und durchzuführenden Messungen haben zum einen den Zweck, Sie in die elementaren Elemente der digitalen Schaltalgebra anhand von Schaltungsmodulen mit logisch definierter Verknüpfung von Eingangs- und Ausgangssignal einzuführen. Darüber hinaus soll in - logisch nachvollziehbaren - Zusammenschaltungen solcher Module die Methode der digitalen Zähl- als auch Programmtechnik demonstriert werden.

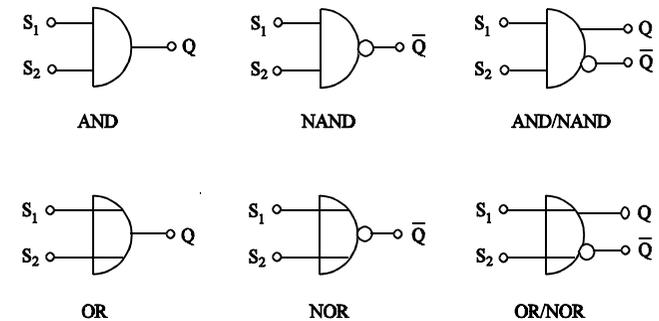
Dazu wird zunächst die Schaltung einer zeitgesteuerten programmierten Abfolge von Ampelsignalen aufgebaut. Danach folgen Aufbauten zur Schaltungen einer Uhr, eines Frequenzzählers sowie einer Stoppuhr zur Bestimmung der Fallzeit einer Kugel.

Kenntnisse über die verschiedenen Zahlensysteme (Basis 2, 10, ...) sowie über logische Verknüpfungen (AND, OR, NOT, NAND, NOR) werden vorausgesetzt.

In der Literatur findet man verschiedene Bezeichnungen für binäre Zustände. In der Mathematik heißen die Ziffern des binären Zahlensystems 0 bzw. 1. An dieser Nomenklatur orientiert sich diese Versuchsanleitung. Häufig werden diese zwei Ziffern auch mit 0 bzw. L bezeichnet, damit eine Verwechslung mit dem Dezimalsystem ausgeschlossen werden kann. Im technischen Bereich spricht man auch von L bzw. H. Diese Bezeichnung repräsentiert die Pegelwerte (Gleichspannungen), die entweder Low (=L) oder High (=H) sind.

#### 2.1 AND/NAND- und OR/NOR-Gatter

Abb. 1 zeigt die Schaltsymbole von AND-, NAND-, OR-, NOR- u. kombinierten AND/NAND- und OR/NOR-Gattern, welche die Werte der Ausgänge Q und  $\bar{Q}$  mit denen der Eingänge  $S_1$  und  $S_2$  entsprechend logisch verknüpfen. Die nachfolgende Wertetabelle zeigt für die möglichen Kombinationen der binären Eingangszustände  $S_1$  und  $S_2$  die entsprechenden Ausgangszustände Q bzw.  $\bar{Q}$  für die jeweiligen Gatter.

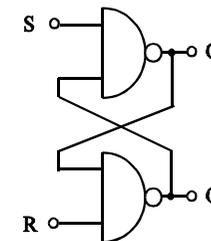


**Abb. 1:** Schaltsymbole der AND-, NAND-, OR-, NOR- sowie kombinierten Gatter

$S_1$	$S_2$	Q		$\bar{Q}$	
		AND	OR	NAND	NOR
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0

**Tab. 1:** Ausgangszustände Q und  $\bar{Q}$  in Abhängigkeit von den Eingangszuständen  $S_1$  und  $S_2$  für die verschiedenen logischen Gatter

#### 2.2 RS-Flip-Flop



**Abb.2:**  
RS-Flip-Flop

Werden zwei NAND-Gatter mit "Rückkopplung" nach Abb. 2 miteinander verbunden, so erhält man ein sog. *RS-Speicher-Flip-Flop* mit zwei Eingängen S und R und zwei Ausgängen  $Q_1$  und  $Q_2$ . Es gibt wieder vier verschiedene Kombinationen für die Eingangssignale S und R:

Fall 1:  $S = 0$  und  $R = 0$

Für  $S = 0$  folgt (unabhängig von R)  $Q_1 = 1$ . Ebenso folgt für  $R = 0$  (unabhängig von S)  $Q_2 = 1$ . Dieser (auch in der Praxis mögliche) Fall wird als unzulässig erklärt. Begründung siehe Fall 4.

Fall 2:  $S = 1$  und  $R = 0$

Für  $R = 0$  folgt  $Q_2 = 1$ . Mit  $Q_2 = 1$  und  $S = 1$  folgt  $Q_1 = 0$ . Der Wert von  $Q_1$  wird also in jedem Fall rückgestellt ( $Q_1 = 0$ : *RESET*).

Fall 3:  $S = 0$  und  $R = 1$

Für  $S = 0$  folgt  $Q_1 = 1$ . Mit  $Q_1 = 1$  und  $R = 1$  folgt  $Q_2 = 0$ . Mit dieser Eingangskombination wird der Wert von  $Q_1$  gesetzt ( $Q_1 = 1$ : *SET*).

Fall 4:  $S = 1$  und  $R = 1$

Dies ist der interessanteste Fall. Aus  $Q_1 = 0$  folgt  $Q_2 = 1$ . Aus  $Q_1 = 1$  folgt  $Q_2 = 0$ . Hieraus ergibt sich, dass im Falle der Kombination  $S = R = 1$  die Ausgänge  $Q_1$  und  $Q_2$  invers zueinander sind. Sofern  $Q_1$  und  $Q_2$  bereits auch im Anfangszustand invers zueinander waren, bleibt ihr Wert erhalten (*SPEICHERN*). Der denkbare Fall  $Q_1 = Q_2$  führt dagegen zu einem nicht vorhersehbaren Zustand von  $Q_1$  und  $Q_2$ , wobei nur sicher ist, dass im Endzustand  $Q_1$  invers zu  $Q_2$  ist. Aus diesem Grund wird der oben diskutierte Fall  $S = R = 0$  als unzulässig erklärt.

Die nachstehende Tabelle beschreibt das Verhalten eines RS-Speicher-Flip-Flops.

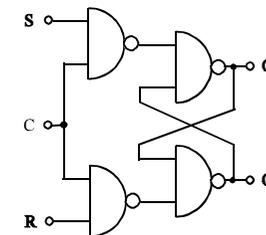
S	R	$Q_1$	$Q_2$	Bemerkungen
0	0	1	1	unzulässig
1	0	0	1	reset
0	1	1	0	set
1	1	$Q_1$	$Q_2 = \overline{Q_1}$	speichern

**Tab. 2:** Wertetabelle für ein RS-Speicher-Flip-Flop

Da mit Impulsen (d.h. zeitlich begrenzten Pegelwerten) an S bzw. R statische Signale  $Q_1$ ,  $Q_2$  erzeugt werden, spricht man auch von einer bistabilen Kippschaltung. Der Vollständigkeit sei erwähnt, dass es darüber hinaus noch andere Kippschaltungen gibt. Die wichtigsten sind die monostabile und die astabile Kippschaltung. Eine Anwendung für eine monostabile Kippschaltung ist z.B. die sich verzögernd ausschaltende Autoinnenleuchte. (Der ausgeschaltete Zustand ist stabil; der eingeschaltete Zustand kehrt nach einer gewissen Verzögerung ohne äußere Beeinflussung in den ausgeschalteten Zustand zurück.) Eine astabile Kippschaltung stellt ein Taktgenerator da. (Beide Zustände sind nicht stabil und ändern sich ohne äußere Beeinflussung nach gewissen Zeiten.)

### 2.3 Getaktetes RS-Flip-Flop

Fügt man zu dem RS-Flip-Flop noch zwei NAND-Gatter gemäß Abb. 3 hinzu, so erhält man ein getaktetes RS-Flip-Flop. Bei diesem wird der Speicherinhalt nicht allein von S bzw. R beeinflusst, sondern auch von einem Taktsignal, das an einem



**Abb. 3:** Getaktetes RS-Flip-Flop

weiteren Eingang C (CLOCK) anliegt. Die Ausgänge können nur noch beeinflusst werden, wenn  $C = 1$  ist. Ansonsten ( $C = 0$ ) bleibt der Speicherinhalt unverändert.

C = 1	S	R	$Q_1$	$Q_2$	Bemerkungen
	1	1	1	1	unzulässig
	0	1	0	1	reset
	1	0	1	0	set
	0	0	$Q_1$	$Q_2 = \overline{Q_1}$	speichern

**Tab. 3:** Wertetabelle für ein getaktetes RS-Flip-Flop

Zur Steuerung werden im Vergleich zum vorher beschriebenen Flip-Flop jetzt invertierte R- bzw. S-Signale benötigt, so dass der Fall  $S = R = 1$  unzulässig ist. Tabelle 3 fasst das Verhalten eines getakteten RS-Flip-Flops zusammen:

### 2.4 JK-Master-Slave-Flip-Flop

Ein JK-Master-Slave-Flip-Flop erhält man durch Hintereinanderschalten zweier getakteter RS-Flip-Flops (Abb. 4). Das erste, das *Master-Flip-Flop* besitzt die Eingänge J, K und C. Seine Ausgänge S, R sind direkt auf die Eingänge des zweiten Flip-Flops, des *Slave-Flip-Flops* geschaltet. Der Takteingang des Slave-Flip-Flops wird über einen Inverter an das Taktsignal C gelegt.

Zum Verständnis sollen zunächst die zusätzlichen Anschlüsse an den Eingängen des ersten Flip-Flops vernachlässigt werden. Gemäß den obigen Wertetabellen werden im Master die Eingangssignale J, K bei  $C = 1$  im Zwischenspeicher als Werte S, R gespeichert, die bei  $C = 0$ , d.h.  $C = 0$  in den Slave übernommen werden. Auch hier wären die Fälle  $J = K = 1$  bzw.  $S = R = 1$  nicht zulässig.

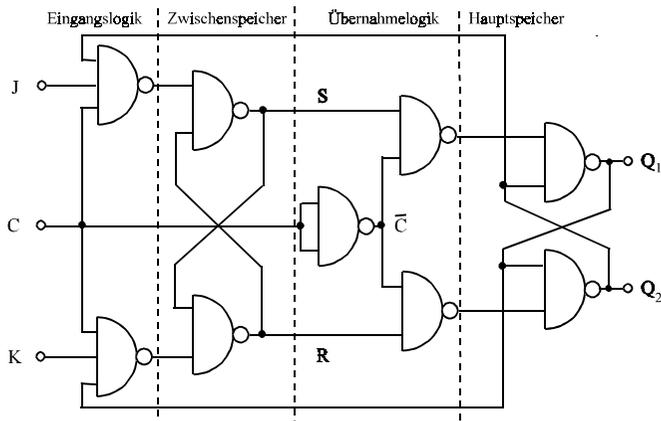


Abb. 4: JK-Master-Slave-Flip-Flop

Die zusätzliche Rückkopplung der Ausgänge  $Q_1, Q_2$  auf die Eingänge des Master-Flip-Flops sorgt jetzt für ein definiertes Verhalten der gesamten Schaltung. Bei jedem vollständigen Taktimpuls, d.h. C wechselt von 0 nach 1 und wieder von 1 nach 0, werden die Ausgangssignale  $Q_1, Q_2$  bezüglich ihres alten Wertes invertiert. Da nach zwei vollständigen Taktimpulsen die Ausgänge  $Q_1, Q_2$  wieder ihren ursprünglichen Wert annehmen, funktioniert das JK-Master-Slave-Flip-Flop als *Impulsuntersetzer*, d.h. die Ausgangsspiegel ändern sich mit halber Taktfrequenz

der Eingänge. Da bei einem JK-Flip-Flop  $Q_1$  und  $Q_2$  grundsätzlich invers zueinander sind, können die Indices entfallen. Man spricht vom Ausgang Q und dem hierzu inversen Ausgang  $\bar{Q}$ .

Die nachfolgende Wertetabelle ist die eines JK-Master-Slave-Flip-Flops nach Durchlaufen eines vollständigen Taktimpulses:

J	K	$Q_{neu}$	$\bar{Q}_{neu}$	Bemerkungen
0	0	$Q_{alt}$	$\bar{Q}_{alt}$	speichern
0	1	0	1	reset
1	0	1	0	set
1	1	$\bar{Q}_{alt}$	$Q_{alt}$	kippen

Tab. 4: Wertetabelle für ein JK-Master-Slave-Flip-Flop

Mit mehreren JK-Master-Slave-Flip-Flops lassen sich Speicher, Schieberegister, Impulszähler, Frequenzteiler, Uhren etc. bauen.

### 2.5 Frequenzteiler

Verbindet man mehrere JK-Master-Slave-Flip-Flops derart zu einer Kette, dass der Takteingang eines Flip-Flops mit dem Q-Ausgang des vorherigen Flip-Flops verbunden ist, so wird mit jedem nachfolgendem Baustein die jeweils anliegende Taktfrequenz halbiert, sofern die Eingangsspiegel J, K den Wert 1 besitzen. Benutzt man n JK-Flip-Flops, so steht am Ausgang des n-ten Flip-Flops eine Impulsfolge der Frequenz  $f_n = f_0/2^n$  zur Verfügung ( $f_0 =$  Taktfrequenz am Eingang des ersten JK-Flip-Flop). Anders ausgedrückt beträgt die Taktperiode am n-ten Ausgang  $T_n = T_0 \times 2^n$ . Benutzt man zusätzlich noch logische Gatter, die an den Ausgängen Q bzw.  $\bar{Q}$  die einzelnen Flip-Flops der Kette angeschlossen sind, so lassen sich beliebige Taktuntersetzungen realisieren.

Geht man davon aus, dass zu Beginn die Q-Ausgänge aller Flip-Flops (Speicherelemente) den Wert 0 haben, haben diese nach Anlegen der Taktfrequenz die in Tabelle 5 (s.u.) angegebenen Werte.

Man erkennt leicht, dass diese Anordnung die Taktimpulse zählt. Der Inhalt der Speicher stellt die binäre Zahl der gezählten Impulse dar (wobei der Speicherinhalt des Speicherelements mit der niedrigsten Ausgangsfrequenz die höchste Wertigkeit

	Speicherelement Nr.						dez. Wert
	1	2	3	4	5	.....	
Ausgangszustand	0	0	0	0	0		0
nach dem 1. Taktimpuls	1	0	0	0	0		1
nach dem 2. Taktimpuls	0	1	0	0	0		2
nach dem 3. Taktimpuls	1	1	0	0	0		3
nach dem 4. Taktimpuls	0	0	1	0	0		4
nach dem 5. Taktimpuls	1	0	1	0	0		5
nach dem 6. Taktimpuls	0	1	1	0	0		6
nach dem 7. Taktimpuls	1	1	1	0	0		7
nach dem 8. Taktimpuls	0	0	0	1	0		8
.....	.....						.....
Wertigkeit	1	2	4	8	16	.....	

**Tab. 5:** Werte für eine Kette von Speicherelementen nach 0 bis 8 Taktimpulsen

besitzt). Will man eine Taktfrequenz um den Faktor  $m$  ( $m = \text{ganze Zahl}$ ) teilen, so löst man einen Reset aus (1-Impuls auf alle R-Eingänge), wenn die Speicher gerade die binäre Darstellung von  $m$  annehmen. Hierzu müssen die  $Q$  bzw.  $\bar{Q}$  der einzelnen Speicherelemente mit AND-Gattern verknüpft werden. Das AND-Signal liefert das Resetsignal mit der Frequenz  $f_0/m$ .

### 2.6 Zeitmesser

Das Prinzip einer digitalen Uhr beruht auf dem Zählen von Impulsen, die in einem sehr genau definierten zeitlichen Abstand aufeinander folgen. Um z.B. aus der (langfristig sehr genauen) Netzfrequenz von 50 Hz eine Uhr zu bauen, wird zunächst mit einem Frequenzteiler diese Frequenz um den Faktor 50 untersetzt. Man erhält einen Sekundentakt, dessen Impulse gezählt werden. Wird eine Anzahl von 60 erreicht, so wird der Sekundenzähler auf 0 zurückgesetzt. Dieser Rücksetzimpuls für die Sekunden dient als Taktsignal für einen weiteren Zähler, den Minutenzähler. Wenn der Minutenzähler den Wert 60 annimmt, so wird der Minutenzähler zurückgesetzt und dieser Impuls von einem dritten Zähler, dem Stundenzähler aufaddiert, der bei Erreichen von 24 auf 0 gesetzt wird.

Verbindet man das höchstfrequente Taktsignal nicht direkt mit dem Takteingang des ersten Flip-Flops, sondern schaltet ein AND- oder NAND-Gatter dazwischen, so werden die Taktimpulse (mit bekannter Periodendauer) nur dann gezählt, wenn sich der zweite Eingang des Gatters auf logischem 1-Pegel befindet. Dieses Gatter

hat die Funktion eines Tors (engl. *gate*). Wird dieses von dem zu messenden Vorgang gesteuert, so kann direkt die Dauer dieses Vorgangs als Vielfaches der Taktperiodendauer gemessen werden (Stoppuhr).

Es ist sofort einsichtig, dass die Auflösung der Zeitmessung proportional zur Taktfrequenz ist. Eine Variante dieser Schaltung führt zu dem Frequenzzähler. Wird das oben erwähnte Tor für eine genau definierte Zeit geöffnet (z.B. für 1 Sekunde) und benutzt man als Zähltakt das zu messende Wechselspannungssignal (im Allg. muss dieses Signal zunächst in eine Rechteckspannung umgewandelt werden), so gibt der Speicherinhalt unmittelbar die unbekannte Frequenz (in binärer Form) an.

### 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Machen Sie sich mit den Bausteinen des Versuchs Taktgeber, AND/NAND-Gatter, OR/NOR-Gatter, Speicherelement etc. vertraut. Bauen Sie ein RS-Flip-Flop sowie ein getaktetes RS-Flip-Flop auf und testen Sie deren Funktionsweise.
- 2. Aufgabe:** Bauen Sie eine Ampelsteuerung auf und testen Sie diese.
- 3. Aufgabe:** Bauen Sie eine Uhr auf und testen Sie ihre Funktion.
- 4. Aufgabe:** Bauen Sie einen Frequenzzähler auf und bestimmen Sie verschiedene Frequenzen des Taktgebers.
- 5. Aufgabe:** Bauen sie eine Stoppuhr auf und bestimmen Sie die Fallzeit einer Kugel.

### 4. Versuchsdurchführung

#### 4.1 Kennenlernen der verwendeten Bauteile

Der verwendete Taktgeber (Abb. 5a) liefert an seinem Taktausgang (blaue Buchse, mittig rechts) ein Rechtecksignal mit einer Frequenz zwischen 0,3 Hz und 300 Hz. Eine Leuchtdiode zeigt den momentanen Spannungspegel an. Der Taktgeber läuft normalerweise kontinuierlich. Mit einem logischen 1-Signal an einem der Stoppeingänge  $H_0$  (gelbe Buchsen) kann er angehalten werden. Wird der Frequenzwahlschalter auf 0 gestellt, so können mittels eines Tasters M (unten rechts) manuell Taktimpulse ausgelöst werden. Die mit 1 gekennzeichnete (schwarze) Buchse (oben rechts) liefert ein logisches 1-Signal.

Im Versuch werden zwei verschiedene logische Bausteine benutzt: das kombinierte AND/NAND- und das kombinierte OR/NOR-Gatter (Abb. 5b und 5c).

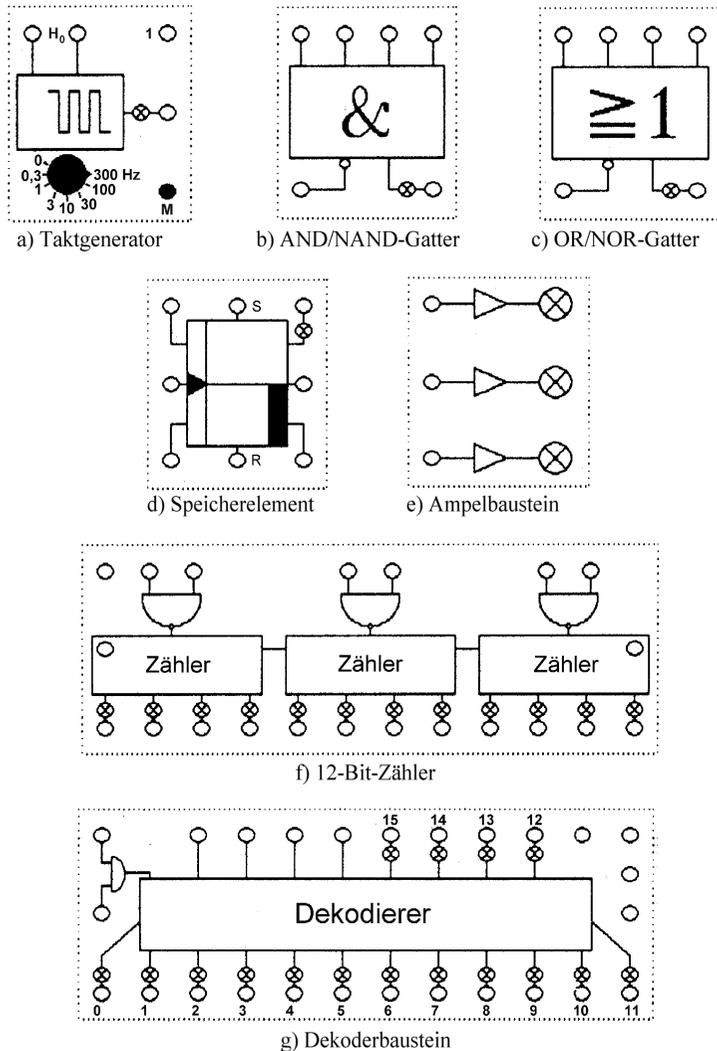


Abb. 5: Die Bausteine des Versuchs

Beide besitzen jeweils vier Eingänge (gelbe Buchsen, oben). Die Gatter sind intern so geschaltet, dass nicht benötigte Eingänge unbeschaltet bleiben können.

Soll z.B. eine AND-Verknüpfung lediglich von zwei Eingangsleitungen durchgeführt werden, so brauchen nur diese zwei Leitungen an zwei beliebigen

Eingängen des AND/NAND-Gatters angeschlossen werden. Die verbleibenden zwei müssen nicht extern beschaltet werden, da sie intern (über einen Widerstand) auf logischem 1-Pegel geschaltet sind. Ähnlich verhält sich das OR/NOR-Gatter, nur dass hier die Eingänge intern auf einen logischen 0-Pegel gebracht werden.

An den Ausgängen der Gatter (grüne Buchse, unten rechts) liegt das AND- bzw. OR-verknüpfte Signal an, dessen Pegel von einer Leuchtdiode angezeigt wird. Am invertierenden Ausgang (rote Buchse, unten links) liegt das entsprechende NAND- (Not AND) bzw. das NOR- (= Not OR) Signal an.

Die im Versuch verwendeten Speicherelemente (Abb. 5d) sind JK-Master-Slave-Flip-Flops. Sie besitzen acht Anschlussbuchsen:

- 2 Takteingänge (blau, mittig rechts u. links). Diese sind intern direkt miteinander verbunden und daher gleichwertig
- 1 J-Eingang (gelb, oben links)
- 1 K-Eingang (gelb, unten links)
- 1 Set-Eingang (schwarz, oben mittig)
- 1 Reset-Eingang (weiß, unten mittig)
- 1 Q-Ausgang (grün, oben rechts). Sein Signalpegel wird von einer Leuchtdiode angezeigt
- 1 not Q-Ausgang (rot, unten rechts).

Es ist zu beachten, dass im unbeschalteten Zustand die J-, K-Eingänge den Wert logisch 1 besitzen.

**Wichtig:** Häufig werden zum Austesten der Schaltungen 0- und 1-Pegel benötigt. Diese werden z.B. einem unbeschalteten AND/NAND-Gatter oder Speicherelement entnommen. Zum Testen der Pegel von Ausgängen kann z. B. der Ampelbaustein (Abb. 5e) benutzt werden. Die Dioden leuchten, wenn ihre Eingänge auf logischem 1-Pegel liegen.

Aufbau und Funktionsweise des 12-Bit-Zählers (Abb. 5f) und Dekoderbausteins (Abb. 5g) werden im Zusammenhang mit dem Aufbau der Uhr erklärt. Weitere (hier nicht abgebildete) Bausteine enthalten Schalter, Taster und Relais, deren Funktionen aus den jeweils aufgedruckten Schaltsymbolen eindeutig hervorgehen.

Die einzelnen Bausteine werden auf ein Grundbrett im Raster 6 x 8 (horizontal 1 - 6, vertikal A - H) gesteckt und damit an die Versorgungsspannung (12 V=) angeschlossen. Es ist darauf zu achten, dass die Bausteine nicht verpolt auf das Grundbrett gesteckt werden.

Beginnen Sie, um sich mit dem Verschalten und Austesten der Bausteine vertraut zu machen, zunächst mit dem Aufbau eines RS-Flip-Flops (Abb. 2). Benutzen Sie

dazu zwei AND/NAND-Gatter, ein Speicherelement zum Setzen der Eingänge R, S und den Ampelbaustein zum Testen der Ausgänge Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>. Verifizieren Sie die Wertetabelle für das RS-Flip-Flop.

Bauen Sie danach unter Hinzunahme zwei weiterer AND/NAND-Gatter ein getaktetes RS-Flip-Flop (Abb. 3) auf und testen Sie ebenfalls die Gültigkeit der Wertetabelle. Verbinden Sie (für C = 1) die Eingänge S und R abwechselnd mit dem not Q-Ausgang (= 0) des Speicherelements und beobachten Sie die Invertierung der Eingangs- und Ausgangs-Gatter.

Testen Sie die Funktionsweise eines Speicherelements, indem Sie den Takteingang mit dem Takteingang des Taktgenerators oder die Eingänge R und S abwechselnd mit dem 1-Ausgang des Taktgenerators verbinden.

#### 4.2 Ampelsteuerung

Es soll die Steuerung für die Ampel an einer Kreuzung realisiert werden (Abb. 6). An einer normalen Kreuzungsampel können acht Phasen unterschieden werden:

Phase 1:	Ampel zeigt rot	(Querverkehr grün)
Phase 2:	Ampel zeigt rot	(Querverkehr gelb)
Phase 3:	Ampel zeigt rot	(Querverkehr rot)
Phase 4:	Ampel zeigt rot/gelb	(Querverkehr rot)
Phase 5:	Ampel zeigt grün	(Querverkehr rot)
Phase 6:	Ampel zeigt gelb	(Querverkehr rot)
Phase 7:	Ampel zeigt rot	(Querverkehr rot)
Phase 8:	Ampel zeigt rot	(Querverkehr rot/gelb)

Nach der achten Phase wiederholt sich der Zyklus. Im Versuch sollen die 1. und die 5. Phase jeweils 5 Sekunden, die übrigen Phasen 1 Sekunde andauern, so dass die Länge des kompletten Zyklus 16 Sekunden beträgt. Benötigt wird daher ein 4-Bit-Zähler (Zahlenbereich von 0 bis 15), der jede Sekunde um "eins" weiterzählt. Das niederwertige Bit des Zählers wird hier mit B<sub>0</sub>, die anderen Bits werden in aufsteigender Folge mit B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub> bzw. B<sub>3</sub> bezeichnet. Das zeitliche Verhalten der Ampelphasen fasst Tabelle 6 zusammen.

Für den logischen Zusammenhang zwischen den Ampelphasen Rot-Gelb-Grün und den Inhalten der Zähler B<sub>0</sub> - B<sub>3</sub> gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{ROT} &= (\text{not } B_3) \text{ or } (B_3 \text{ and } B_2 \text{ and } B_1) \\
 \text{GELB} &= ((\text{not } B_3) \text{ and } B_2 \text{ and } B_1 \text{ and } B_0) \text{ or } (B_3 \text{ and } B_2 \text{ and } (\text{not } B_1) \text{ and } B_0). \\
 \text{GRÜN} &= \text{not } (\text{ROT or GELB})
 \end{aligned}$$

Man baue die entsprechende Schaltung nach Abb. 6 auf. Zunächst ist der

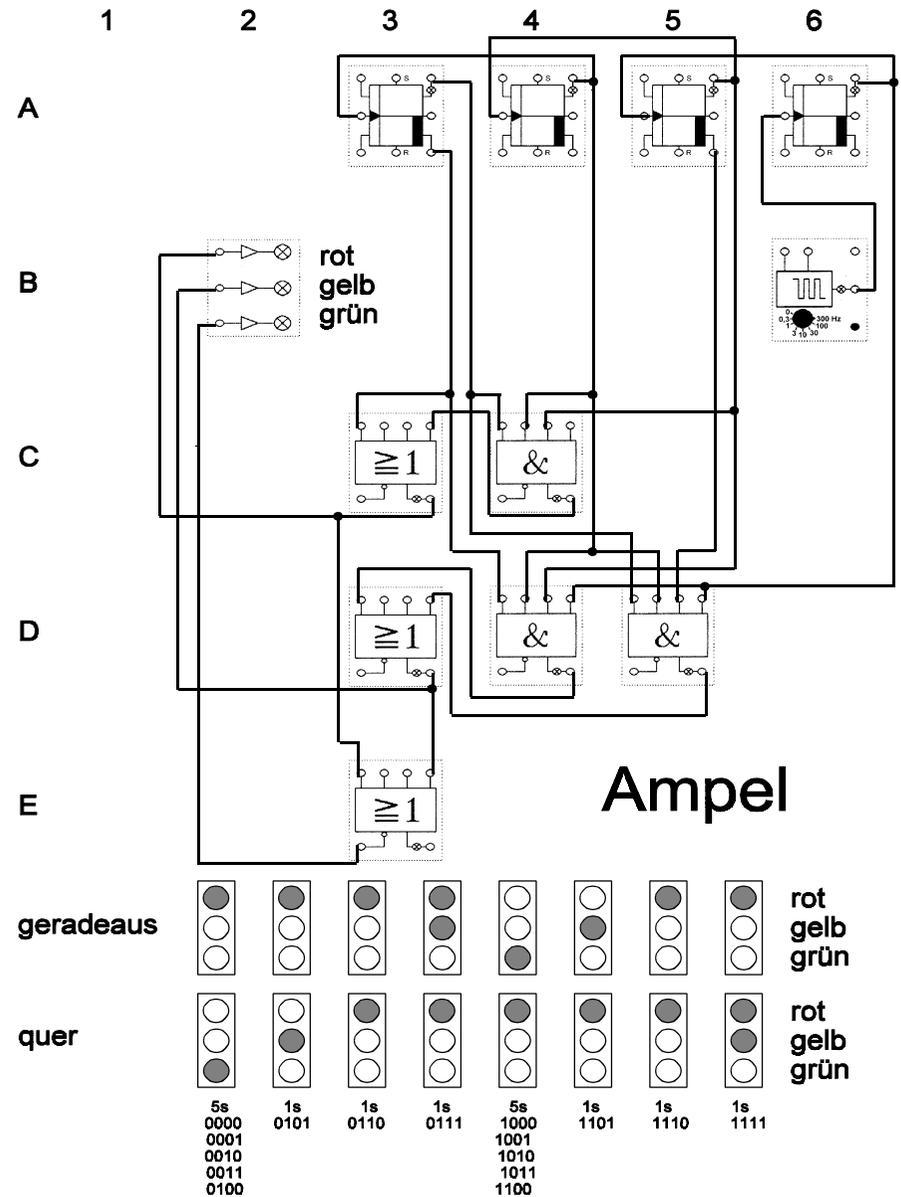


Abb. 6: Schaltung der Ampelsteuerung

4-Bit-Zähler (A3 - A6) zu überprüfen.

Die Bauelemente in Zeile C testen auf ROT, die Bauelemente in Zeile D auf GELB. Der Test auf GRÜN ist sehr einfach und wird in Zeile E realisiert. Den Sekundentakt liefert der Taktgenerator (B6).

Zeit s	Phase Nr.	ROT	GELB	GRÜN	Zählerinhalt			
		0 = aus	1 = ein	1 = ein	B <sub>3</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>0</sub>
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	"	1	0	0	0	0	0	1
3	"	1	0	0	0	0	1	0
4	"	1	0	0	0	0	1	1
5	"	1	0	0	0	1	0	0
6	2	1	0	0	0	1	0	1
7	3	1	0	0	0	1	1	0
8	4	1	1	0	0	1	1	1
9	5	0	0	1	1	0	0	0
10	"	0	0	1	1	0	0	1
11	"	0	0	1	1	0	1	0
12	"	0	0	1	1	0	1	1
13	"	0	0	1	1	1	0	0
14	6	0	1	0	1	1	0	1
15	7	1	0	0	1	1	1	0
16	8	1	0	0	1	1	1	1

Tab. 6: Zeittabelle der Ampelphasen und des 4-Bit-Zählers

### 4.3 Uhr

Die aufzubauende Uhr (Abb.7) verwendet als Frequenznormal die Netzfrequenz. Einem (220V/6V)-Transformator wird ein Zweiweg-Brückengleichrichter nachgeschaltet. Auf diese Weise erhält man eine ungesieberte Gleichspannung, die 100 mal pro Sekunde von nahezu 0 Volt auf ihren maximalen Wert (ca. 7V) ansteigt und wieder auf nahezu 0 Volt abfällt. Der Minuspol des Gleichrichters wird mit dem Minuspol des Schaltbretts verbunden. Der Pluspol der ungeglätteten Gleichspannung wird auf den Eingang eines OR/NOR-Gatters (D6) geschaltet, das dann am Ausgang eine digitalgerechte Rechteckspannung mit einer Frequenz von 100 Hz liefert. Um hieraus einen 1-Sekundentakt zu gewinnen, müssen 100 Impulse abgezählt werden. Hierfür benötigt man einen 7-Bit-Zähler (A1 - A6, B6). Mit zwei AND/NAND-Gattern (C2, C3) wird der Zählerinhalt auf dezimal 100,

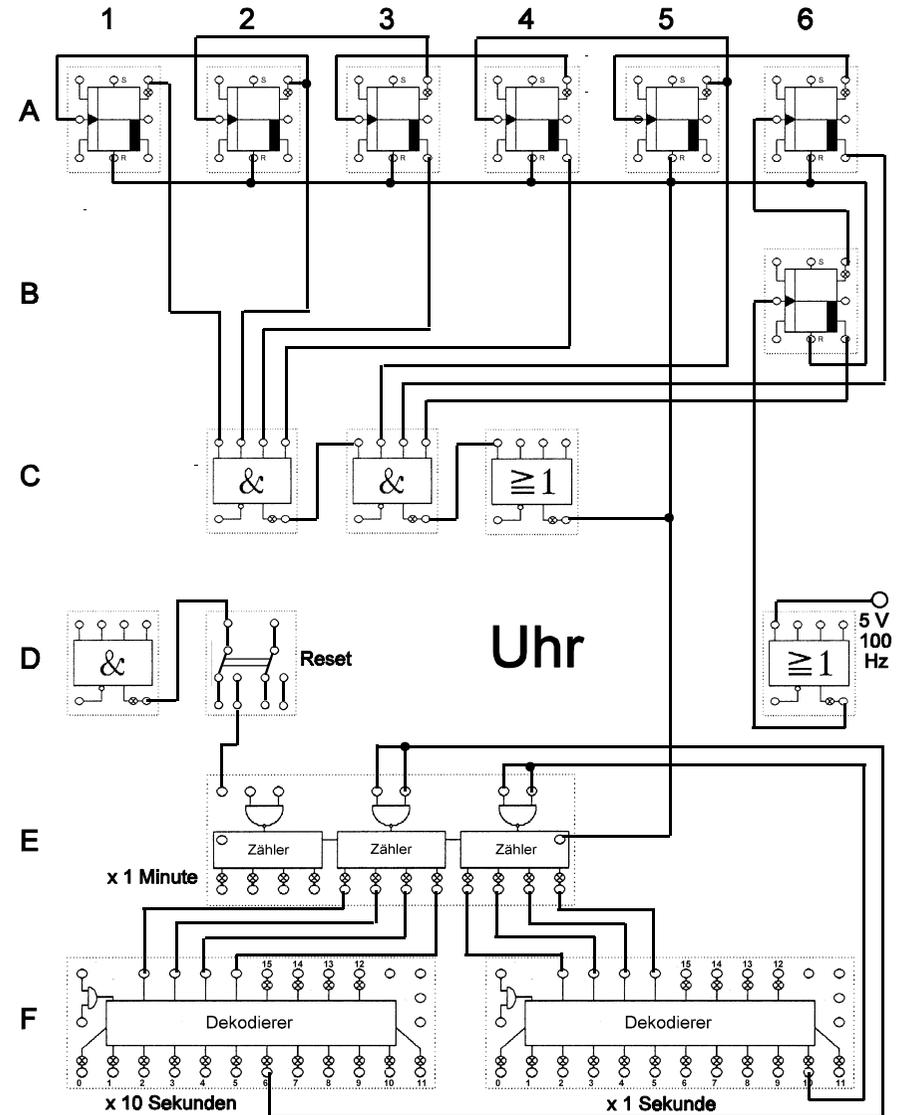


Abb. 7: Schaltung der Uhr

d.h. binär 1100100 getestet. Bei Erreichen des Zählerstandes von binär 1100100

gelangt ein 1-Signal an den Ausgang des zweiten AND/NAND-Gatters (C3). Dieses Signal wird mittels eines OR/NOR-Gatters (C4) etwas verzögert und auf die Reseteingänge des 7-Bit-Zählers geführt. Eine Verzögerung ist nötig, da die verwendeten Speicherelemente nicht gleich schnell schalten. Sobald das schnellste Speicherelement (welches vorher den Wert 1 hatte) zurückgestellt wird, ist der Zählerinhalt von binär 1100100 verschieden. Dadurch gelangt an die Reseteingänge wieder ein 0-Signal noch bevor alle Speicher zurückgesetzt wären. Die endliche Schaltzeit des OR/NOR-Gatters gewährleistet, dass der Resetimpuls ausreichend lang vorliegt.

Das Resetsignal dient gleichzeitig als 1-Sekundentakt für einen 12-Bit-Zähler (E2 - E4), der aus drei 4-Bit-Zählern besteht, die hintereinandergeschaltet sind und einzeln zurückgesetzt werden können. Der erste (E4) dieser drei Zähler zählt die Einer-Sekunden, der zweite (E3) die Zehner-Sekunden, der dritte (E2) die Einer-Minuten. Um die in binärer Form vorliegenden Zählerinhalte leichter ablesen zu können, werden zwei Dekoderbausteine benutzt. Ein Dekoder aktiviert für jeden der 16 verschiedenen Werte (0 - 15) eines 4-Bit-Wortes eine von 16 Ausgangsleitungen. Immer besitzt einer und nur einer der Ausgänge den Wert 1. Die Ausgangspegel werden von Leuchtdioden angezeigt. Sobald der für die Einer-Sekunden zuständige Dekoder (F4 - F6) die Zahl dezimal 10 dekodiert, löst er mit dem entsprechenden Ausgang einen Reset für den Einer-Sekundenzähler (E4) aus, so dass jetzt die Zahl 0 dekodiert wird. Ähnlich funktioniert der Dekoder für die Zehner-Sekunden (F1 - F3), nur dass dieser bereits bei Erreichen der Zahl 6 den zugehörigen Zähler (E3) zurücksetzt.

Mit einem zusätzlichen Reseteingang am 12-Bit-Zähler kann die Uhr jederzeit von Hand auf 0 Minuten, 0 Sekunden gestellt werden.

#### 4.4 Frequenzzähler

Aus der Schaltung für die Uhr lässt sich relativ einfach ein Frequenz- bzw. Impulszähler aufbauen (Abb.8). Aus der Netzfrequenz wird wieder ein Sekundentakt gewonnen, der beim Zähler ein sog. *Tor* steuert. Das Tor besteht aus einem AND/NAND-Gatter (D4), das nur dann die Impulse der zu messenden Rechteckspannung auf den Eingang des 12-Bit-Zählers schaltet, wenn der Sekundentakt auf 1-Pegel liegt.

Zur Erklärung des Messablaufs soll mit dem Auslösen des Resetschalters (D2) begonnen werden. Wird dieser Schalter geschlossen, so liegt an allen Reseteingängen ein 1-Pegel an, womit alle Speicherelemente (A1-A6, B6) und der 12-Bit-Zähler (E2 - E4) den Zahlenwert 0 annehmen. Da hierfür der Ausgangspegel des AND/NAND-Gatters (D1) allein nicht ausreicht, ist ein

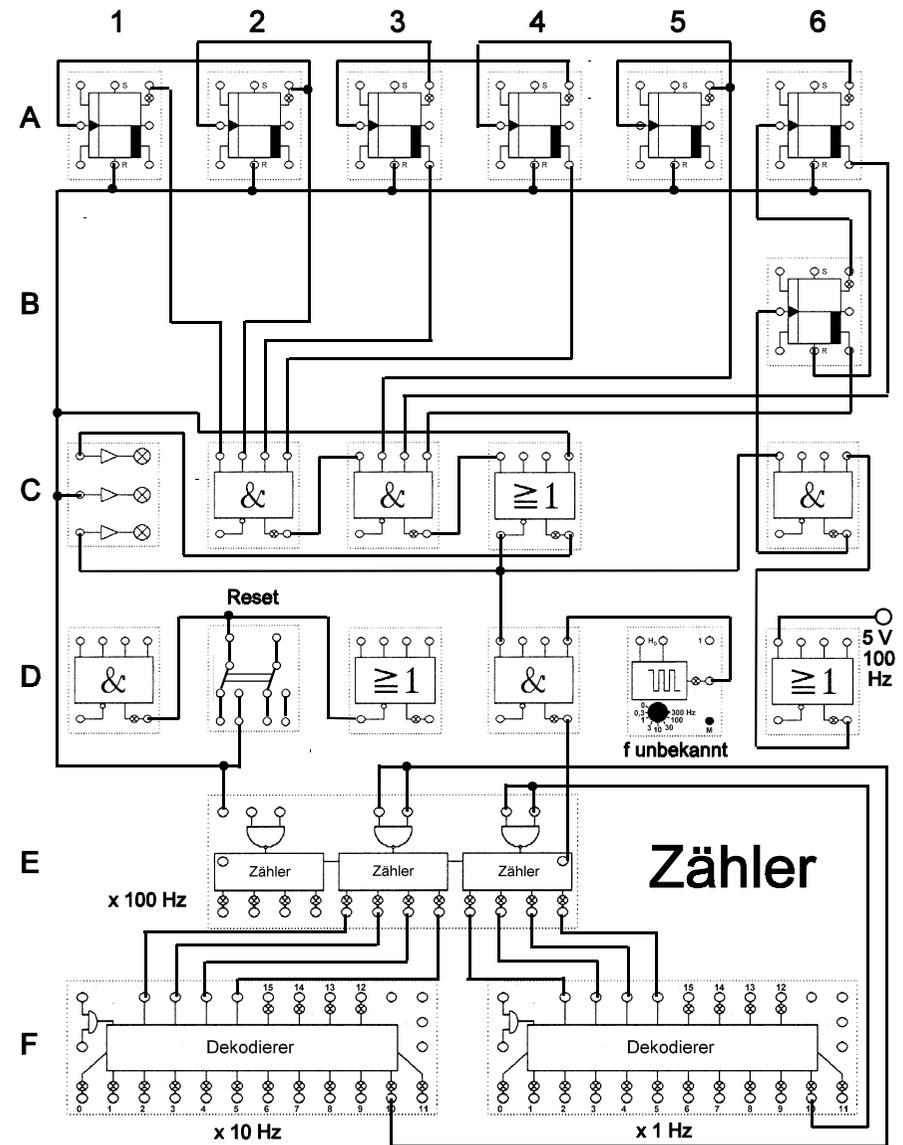


Abb. 8: Frequenzzähler

OR/NOR-Gatter (D3) mit dem invertierenden Ausgang parallelgeschaltet. Das Resetsignal liegt ebenfalls an dem OR/NOR-Gatter (C4) an, das dann mit seinem invertierenden Ausgang das Tor (D4) sperrt, d.h. am Ausgang des AND/NAND-Gatters (D4) liegt immer ein 0-Pegel vor, wenn der Resetschalter geschlossen wird. Ein zweites Tor (C6) sperrt die Zählimpulse für die Zeitbasis. Der Resetvorgang wird durch das Leuchten des gelben und des roten Lämpchens am Ampelbaustein (C1) angezeigt.

Nach dem Öffnen des Resetschalters beginnt der Zählvorgang. Solange der 7-Bit-Zähler noch nicht den Zahlenwert dezimal 100 angenommen hat, gelangen an die Eingänge des OR/NOR-Gatters (C4) nur 0-Pegel, so dass jetzt dessen invertierender Ausgang das Tor (D4) und das Tor (C6) öffnet. Während das Tor (D4) geöffnet ist, werden die Zählimpulse der zu untersuchenden Rechteckspannung - in unserem Fall die Impulse des Taktgenerators (D5) - von dem 12-Bit-Zähler registriert. Der Zählvorgang wird durch das Leuchten des grünen Lämpchens am Ampelbaustein angezeigt. Sobald der 7-Bit-Zähler (dezimal) 100 Taktimpulse des Frequenz-Normals gezählt hat, gelangt an den linken Eingang des OR/NOR-Gatters (C4) ein 1-Signal, wodurch die beiden Tore (D4 und C6) gesperrt werden. Dann leuchtet allein das rote Lämpchen. In dieser Phase wird die Notwendigkeit des zweiten Tors (C6) ersichtlich. Ohne dieses Tor würde der 7-Bit-Zähler weiterlaufen. Schon beim nächsten Taktimpuls (Zählerinhalt = dezimal 101) würde das Tor (D4) wieder geöffnet und der Zählvorgang fortgesetzt.

Die drei Zähler des 12-Bit-Zählers sind als Dekadenzähler geschaltet, was eine direkte Frequenzanzeige mittels der zwei Dekoder erlaubt. Wahlweise kann ein weiterer (kleiner) Dekoder mit Digitalanzeige (E1, o.Abb.) an den 100Hz-Zähler angeschlossen werden. Im Versuch sollen am Taktgenerator die Frequenzen nominell 10, 30, 100 und 300 Hz eingestellt und jeweils fünf mal gemessen werden. Man diskutiere die Genauigkeit der Frequenzmessung.

#### 4.5 Stoppuhr und Bestimmung der Fallzeit einer Kugel

Die im Versuch aufzubauende Stoppuhr (Abb.9) besteht wieder aus einem (12-Bit-) Zähler, der die Impulse einer Rechteckspannung bekannter Frequenz (Taktgenerator D5) zählt. Der Zählvorgang wird wieder über ein Tor (D4) gesteuert, welches im Falle der Stoppuhr von dem zu messenden Vorgang beeinflusst wird.

Solange der linke Eingang des AND/NAND-Gatters (C2) auf 1-Pegel liegt, läuft der Zähler. Die Art der Steuerung von Start bzw. Stop hängt von dem zu messenden Vorgang ab.

Im Versuch soll die Fallzeit einer Kugel bestimmt werden. Diese wird zu Beginn

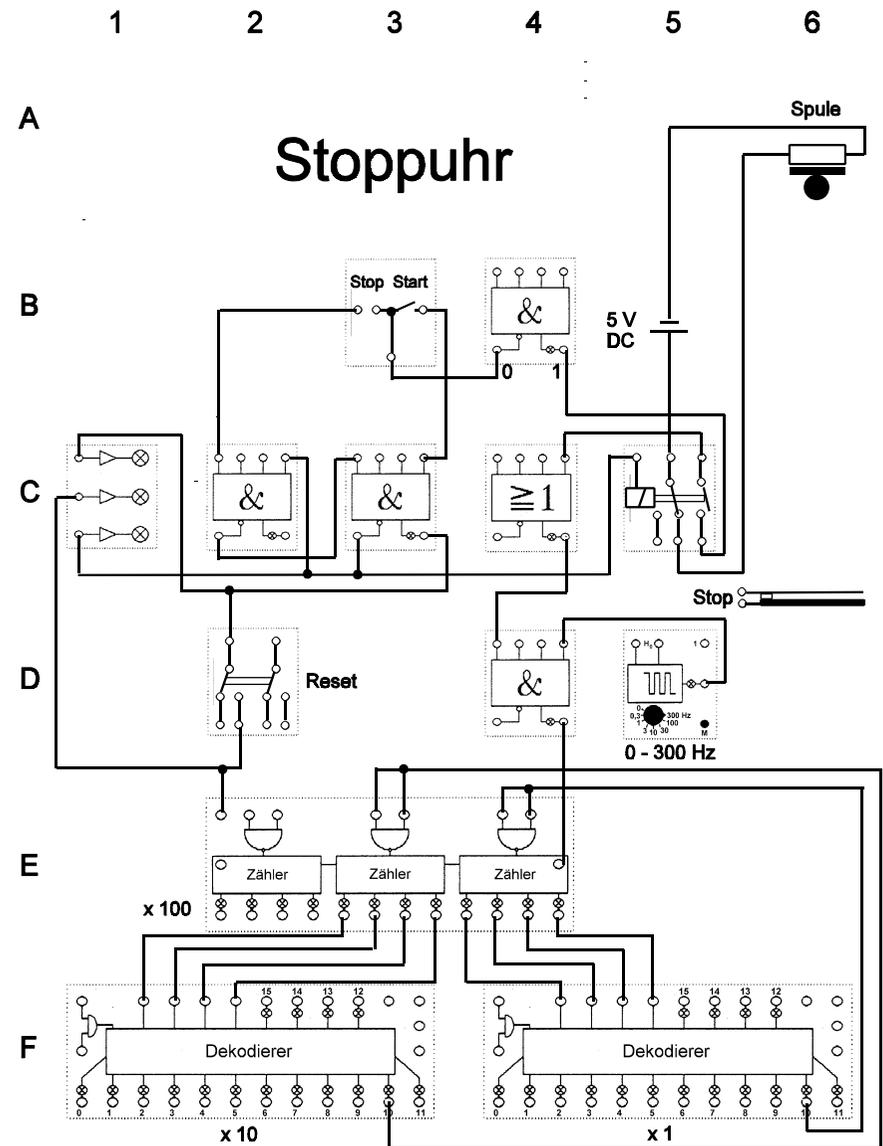


Abb. 9: Stoppuhr

des Experiments von einem Elektromagneten gehalten, der an einem Stativ montiert ist. Die Betriebsspannung des Magneten (ca. 5 V) wird von einem Gleichspannungsnetzgerät geliefert. Beim Start des Experiments wird nach Drücken der Starttaste (B3) der Elektromagnet stromlos und gleichzeitig der Zählvorgang ausgelöst. Die Kugel fällt auf ein dünnes Metallblech, welches in geringem Abstand über einem weiteren Blech montiert ist. Die Bleche sind voneinander isoliert je mit einem der Stopp-Kontakte (B3) verbunden. Beim Aufprall der Kugel biegt sich das obere Blech für kurze Zeit nach unten und kommt in Kontakt mit dem unteren Blech. Damit wird ein Stromkreis geschlossen, was ein Stoppen des Zählers zur Folge hat.

Die Start/Stop-Elektronik muss gewährleisten, dass lediglich Impulse nötig sind, um den Zähler zu steuern. Diese Anforderung erfüllt eine bistabile Kippstufe (RS-Flip-Flop), bestehend aus zwei AND/NAND-Gattern (C2 und C3).

Im Ruhezustand sind die Starttaste und die Stopkontakte offen, d.h. die Eingänge der zwei AND/NAND-Gatter auf 1-Pegel. Wird der Stopkontakt (B3) kurzfristig geschlossen (s. Reset-Befehl des RS-Flip-Flops), so führt der NAND-Ausgang des rechten Gatters (C3) den 0-Pegel und der AND-Ausgang entsprechend den 1-Pegel, wodurch die rote Diode des Ampelbausteins (C1) leuchtet. Das 0-Signal am NAND-Ausgang verhindert, dass das Relais (C5) anzieht. So bleibt einerseits der Stromkreis für den Elektromagneten geschlossen und andererseits der Eingang am OR/NOR-Gatter (C4) auf 0-Pegel, d.h. das Tor (D4) sperrt.

Durch Schließen des Resetschalters (D2) wird der 12-Bit-Zähler (E2 - E4) auf 0 gesetzt und die gelbe Diode der Ampel leuchtet. Diese Rückstellung funktioniert nur in der Stopphase, da das Resetsignal aus dem AND-Ausgang des rechten AND/NAND-Gatters (C3) gewonnen wird. Während der Zählphase liegt an diesem Ausgang ein 0-Signal an.

Durch Betätigen des Starttasters (s. Set-Befehl des RS-Flip-Flops) werden alle Ausgangspegel der AND/NAND-Gatter (C2 und C3) umgekehrt. Das Relais zieht an und macht den Elektromagneten stromlos. Ein zweiter Schaltkontakt des Relais speist das OR/NOR-Gatter (C4) mit einem 1-Pegel, wodurch schließlich das Tor (D4) öffnet.

Das OR/NOR-Gatter hat bei dieser Schaltung nur die Aufgabe, im Ruhezustand des Relais das AND/NAND-Gatter mit einem 0-Pegel anzusteuern. (Zur Erinnerung: Ohne äußere Beschaltung liegen die Eingänge des AND/NAND-Gatters auf 1-Pegel.)

Im Versuch soll die Fallzeit der Kugel für zwei verschiedene (jeweils vorgegebene) Fallhöhen gemessen werden. Man benutze als Frequenznormal den Taktgenerator

(D5) in der Stellung nominell 100 Hz und 300 Hz und messe die Fallzeit jeweils fünf mal. Für die Auswertung rechne man mit den wahren Frequenzwerten des Taktgenerators, die im vorherigen Teil des Versuchs bestimmt worden sind. Aus dem Messergebnis ist gegebenenfalls das Gesetz des freien Falls zu bestätigen und die Erdbeschleunigung  $g$  zu bestimmen. Schätzen Sie aus den Fehlern (Standardabweichung) bei der Frequenzbestimmung des Taktgenerators und der Fallzeit den Fehler von  $g$  ab. Diskutieren Sie mögliche systematische Fehler bei der hier angewandten Methode der Fallzeitbestimmung.

### 5. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Stellen Sie eine Wertetabelle der möglichen Kombinationen von Eingang- und Ausgangszuständen für AND-, NAND-, OR- und NOR-Gatter auf.
- 2) Aus welchen logischen Gattern besteht ein RS-Flip-Flop? Wie sind die erlaubten Kombinationen von Eingangszuständen mit denen der Ausgänge logisch verknüpft?
- 3) Aus welchen logischen Gattern ist ein getaktetes RS-Flip-Flop, aus welchen ein Master-Slave-Flip-Flop aufgebaut?
- 4) Stellen Sie eine Tabelle der logischen Verknüpfungen von Ein- und Ausgängen eines Master-Slave-Flip-Flops auf und interpretieren Sie die Wirkung der Eingangskombinationen auf die Ausgänge.
- 5) Beschreiben Sie anhand der Antwort zu Frage 4 die Frequenzumsetzung in einer Kette geeignet zusammengeschalteter JK-Master-Slave-Flip-Flops.
- 6) Woraus besteht ein binärer Zähler? Aus welchen Bausteinen bzw. Funktionsgruppen besteht eine Uhr?
- 7) Wie lässt sich aus einer Uhr ein Frequenzzähler bauen, wie daraus eine Stoppuhr?

## Versuch D 15: Zeeman-Effekt

**1. Literatur:** Hellwege, Einführung in die Physik der Atome  
Gerthsen/Kneser/Vogel, Physik  
Pohl, Bd. 3: Optik und Atomphysik  
Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik,  
Bd. IV,1: Aufbau der Materie

**Stichworte:** Atombau u. Quantenzahlen; Bahndrehimpuls, Spin u. magn. Momente von Ein- u. Mehrelektronensystemen; Kopplung atomarer Drehimpulse, Multiplettstruktur; Termsymbole u. Termschemata (speziell von Cd); Auswahlregeln f. elektr. Dipolstrahlung; Wechselwirkungen von Atomen mit äußeren Feldern, Zeeman-Effekt, Larmor-Frequenz; Interferenz an planparallelen Schichten (Lummer-Gehrcke-Platte); Hall-effekt in Halbleitern (Hallsonde)

## 2. Grundlagen

### 2.1 Einleitung

Wenn Atome in einem Magnetfeld Licht emittieren, so beobachtet man, dass ihre Spektrallinien in eine mehr oder weniger große Anzahl einzelner Linien aufgespalten sind. Diese Erscheinung wird *Zeeman-Effekt* genannt (Zeeman, 1896). Zeemans Entdeckung zeigte - lange bevor man detaillierte Kenntnis vom inneren Aufbau der Atome hatte -, dass die Bewegung von Atomelektronen mit der Lichtemission verknüpft ist.

Die Quantentheorie erklärt die Linienspektren der Atome durch Lichtquanten der Energie  $h\nu$ , die beim Übergang der Elektronen eines Atoms zwischen strahlungslosen Zuständen mit diskreten Energieniveaus der Differenz  $\Delta E = h\nu$  emittiert oder absorbiert werden. Der Zeeman-Effekt ist deshalb auf geänderte Energieniveaus der Elektronen in einem Magnetfeld zurückzuführen. Er wird durch die Wechselwirkung des Magnetfelds mit den magnetischen Momenten der Elektronen in den verschiedenen Atomzuständen verursacht.

### 2.2 Atomare Quantenzahlen, Drehimpulse, magnetische Momente

Die Energiezustände der Elektronen eines Atoms sind durch jeweils einen spezifischen Satz von Quantenzahlen gekennzeichnet:

Die *Hauptquantenzahl*  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) beschreibt die Anordnung der Elektronen

in konzentrischen Schalen um den Atomkern.  $n = 1$  kennzeichnet die innerste, energetisch niedrigste Schale, die K-Schale,  $n = 2, 3, \dots$  die darauf folgenden, energetisch höheren Schalen (L-, M-Schale usw.).

Die *Neben- oder Bahnquantenzahl*  $\ell$  ( $\ell = 0, 1, \dots, n - 1$ ) legt die Symmetrie der Ladungsverteilung eines Elektrons um den Atomkern fest.  $\ell = 0$  bedeutet Kugelsymmetrie (s-Zustand).  $\ell = 1, 2, \dots$  (p-, d-Zustand usw.) entspricht im Bild des Bohr-Sommerfeldschen Atommodells einem Zustand des Elektrons mit Bahndrehimpuls  $\underline{\ell}$  vom Betrag

$$|\underline{\ell}| = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \hbar, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (1)$$

Die *magnetische Bahnquantenzahl*  $m_\ell$  ( $m_\ell = \ell, \ell - 1, \dots, -\ell$ ) kennzeichnet die Orientierung der Ladungsverteilung bezüglich einer von außen (z.B. durch ein Magnetfeld) vorgegebenen Richtung  $z$ . Die  $z$ -Komponente  $\ell_z$  des Bahndrehimpulses kann nur  $2\ell + 1$  mögliche, durch  $m_\ell$  festgelegte Werte haben:

$$\ell_z = m_\ell \hbar \quad (2)$$

Die *Spinquantenzahl*  $s$  ( $s = 1/2$ ) beschreibt den Spin oder - in formaler Analogie zum Bahndrehimpuls - den *Eigendrehimpuls*  $\underline{s}$  des Elektrons vom Betrag

$$|\underline{s}| = \sqrt{s(s + 1)} \hbar = \frac{1}{2}\sqrt{3} \hbar \quad (3)$$

Die *magnetische Spinquantenzahl*  $m_s$  ( $m_s = \pm 1/2$ ) legt die Größe der  $z$ -Komponente  $s_z$  des Elektronenspins bezüglich einer vorgegebenen Richtung fest:

$$s_z = m_s \hbar = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (4)$$

Mit dem Bahndrehimpuls und Spin des Elektrons sind entsprechende magnetische Dipolmomente\*  $\underline{\mu}_\ell$  und  $\underline{\mu}_s$  verknüpft:

---

\*) Das magn. Moment  $\mu$  wird hier in der Ampereschen Definition benutzt:  
 $\mu_{(A)} = M \mathbf{V}$ ; ( $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{I}$ ). In der Coulombschen Definition ist  
 $\mu_{(C)} = \mathbf{I} \mathbf{V} = \mu_0 \mu_{(A)}$ .

$$\underline{\mu}_l = \gamma_l \underline{\ell} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \underline{\ell}, \quad \mu_{lz} = \gamma_l \ell_z = -\mu_B m_l \quad (5)$$

$$\underline{\mu}_s = \gamma_s \underline{s} = -\frac{2\mu_B}{\hbar} \underline{s}, \quad \mu_{sz} = \gamma_s s_z = -2\mu_B m_s \quad (6)$$

Das Verhältnis  $\gamma_l = -\mu_B / \hbar$  bzw.  $\gamma_s = -2\mu_B / \hbar$  nennt man *gyromagnetisches Verhältnis* von Bahndrehimpuls bzw. Spin,  $\mu_B = e \hbar / 2m = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A m}^2$  ist das *Bohrsche Magneton*, die atomare Einheit für das magnetische Moment.  $\underline{\mu}_l$  und  $\underline{\mu}_s$  sind wegen der negativen Elementarladung dem Drehimpuls und Spin entgegengerichtet und wie diese durch die Quantenzahlen  $\ell$ ,  $m_l$ ,  $s$  und  $m_s$  festgelegt.

### 2.3 Energie des Elektrons im Magnetfeld, Larmor-Präzession

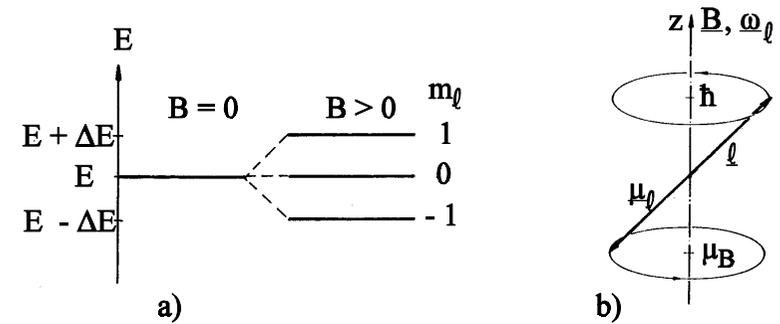
Ein magnetischer Dipol  $\underline{\mu}$  hat in einem Magnetfeld  $\underline{B}$  die potentielle Energie  $E_m = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}$ . Die potentielle Energie  $E_{ml}$  eines Elektrons im Atom infolge seines Bahnmoments ist daher mit Gl. (5) und z.B.  $\ell = 1$ :

$$E_{ml} = -\underline{\mu}_l \cdot \underline{B} = -\mu_{lz} B = m_l \mu_B B = \begin{cases} \mu_B B & \text{für } m_l = 1 \\ 0 & \text{für } m_l = 0 \\ -\mu_B B & \text{für } m_l = -1 \end{cases} \quad (7)$$

Die Energie  $E_{ml}$  kann also nur  $2\ell + 1$  diskrete, durch  $m_l$  festgelegte Werte haben, die sich jeweils um die Energie  $\Delta E = \mu_B B$  unterscheiden. Entsprechend ist die potentielle Energie  $E_{ms}$  des Elektrons infolge seines Spinnmoments  $\underline{\mu}_s$ :

$$E_{ms} = -\underline{\mu}_s \cdot \underline{B} = -\mu_{sz} B = 2m_s \mu_B B = \begin{cases} \mu_B B & \text{für } m_s = \frac{1}{2} \\ -\mu_B B & \text{für } m_s = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (8)$$

Die Gesamtenergie des Elektrons setzt sich zusammen aus seiner Energie  $E_0$  ohne äußeres Feld und der Energie  $E_m$ . Für den Fall  $E_m = E_{ml}$ ,  $\ell = 1$ , ist das Niveau  $E_0$  in drei Niveaus, ein sog. *Zeeman-Triplett* aufgespalten (s. Abb. 1a), im Fall  $E_m = E_{ms}$  in zwei Niveaus, ein *Zeeman-Dublett*. Die energetisch benachbarten Niveaus haben die Energiedifferenz  $\Delta E_{ml} = \mu_B B$  bzw.  $\Delta E_{ms} = 2\mu_B B$ . Die nur durch  $m_l$  und  $m_s$  unterschiedenen Zustände haben ohne Magnetfeld die gleiche Energie  $E_0$ , sie sind *entartet*.



**Abb.1:** a) Zeeman-Aufspaltung der Energie eines Elektrons mit Bahndrehimpuls ( $\ell = 1$ ); b) Larmor-Präzession von Bahndrehimpuls  $\underline{\ell}$  und magn. Moment  $\underline{\mu}_l$  des Elektrons ( $m_l = 1$ )

Nun zeigen bestimmte Spektrallinien einiger Elemente im Magnetfeld eine Aufspaltung gerade in drei Komponenten, die sich um den Betrag  $\Delta v = \mu_B B / h$  unterscheiden. Dieser Spezialfall des Zeeman-Effekts, bei dem der Spin der Elektronen keine Rolle spielt (s. Kap. 2.5), wird aus historischen Gründen *normaler Zeeman-Effekt* genannt; er ist auch klassisch erklärbar:

Ein den Atomkern im Abstand  $r$  umkreisendes Elektron hat den Drehimpuls

$$\underline{\ell} = \underline{r} \times \underline{p} = m r^2 \underline{\omega} \quad (9)$$

und infolge des Kreisstromes  $i = -e \omega / 2\pi$  um die Fläche  $\pi r^2$  das magn. Moment der Größe  $i \pi r^2$ , also:

$$\underline{\mu}_l = -\frac{e r^2}{2} \underline{\omega} = -\frac{e}{2m} \underline{\ell} \quad (10)$$

Da die Vektoren  $\underline{\ell}$  und  $\underline{\mu}_l$  immer antiparallel zueinander stehen, bewirkt das vom Magnetfeld auf  $\underline{\mu}_l$  ausgeübte Drehmoment  $\underline{D}$  nach der klassischen Mechanik, dass  $\underline{\ell}$  und  $\underline{\mu}_l$  wie ein Magnetkreisel um die Feldrichtung mit der Kreisfrequenz  $\underline{\omega}_L$ , bzw.  $\nu_L = \omega_L / 2\pi$ , der sog. *Larmor-Frequenz* präzedieren (s. Abb. 1b). Mit

$$\underline{D} = \underline{\mu}_l \times \underline{B} = \frac{d\underline{\ell}}{dt} = \underline{\omega}_L \times \underline{\ell} \quad (11)$$



$$\begin{aligned} \ell = 0: \quad \underline{J} = \underline{s}; \quad J = s = \frac{1}{2}; \quad M_J = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ \ell = 1: \quad \underline{J}_{1,2} = \underline{l} + \underline{s}; \quad J_1 = \frac{3}{2}; \quad M_J = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \\ J_2 = \frac{1}{2}; \quad M_J = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

Die Zustände mit gleichem  $\underline{L}$  (hier  $\underline{l}$ ) und  $\underline{S}$  (hier  $\underline{s}$ ) ergeben aufgrund der verschiedenen Einstellmöglichkeiten des Spins relativ zum Bahndrehimpuls Zustände mit verschiedenem Gesamtdrehimpuls  $\underline{J}$  (hier  $\underline{J}_1$  und  $\underline{J}_2$ ). Die Energie dieser Zustände ist - schon ohne äußeres Magnetfeld - wegen der (hier schwachen) Spin-Bahn-Kopplung leicht unterschiedlich. Es entsteht somit eine Schar dicht zusammenliegender Energieniveaus, ein sog. *Multiplett*. Die einzelnen Niveaus werden durch *Termsymbole* der Form  $^{2S+1}L_J$  gekennzeichnet. Die *Multiplicität*  $2S + 1$  gibt im Fall  $L > S$  die Zahl der Niveaus des Multipletts an (für  $L < S$  ist die Niveauezahl  $2L + 1$ ). Für  $L = 0, 1, 2, 3, \dots$  steht der Großbuchstabe S, P, D, F... Im obigen Beispiel, Gl. (18), sind das Singulett (ein Niveau)  $^2S_{1/2}$  ( $S=1/2, L=0, J=1/2$ ) und die beiden Dublett-Komponenten (zwei Niveaus)  $^2P_{3/2}$  und  $^2P_{1/2}$  ( $S=1/2, L=1, J=1/2, 3/2$ ) möglich. Der Übergang von Elektronen aus diesen beim Na-Atom energetisch nahezu gleichen Dublett-Zuständen in den energetisch tiefer liegenden Singulett-(Grund)-Zustand bewirkt die Emission der gelben Doppellinie ( $\lambda = 589,00$  u.  $589,59$  nm). Die Multipletts bewirken also bei optischen Übergängen der Elektronen die Feinstruktur der Spektren. Die Auftragung der Multiplett-Niveaus in Gruppen mit jeweils gleichen Termsymbolen und verschiedener Hauptquantenzahl  $n$  über der Energie nennt man *Termschema* eines Atoms.

### 2.5 Zeeman-Effekt

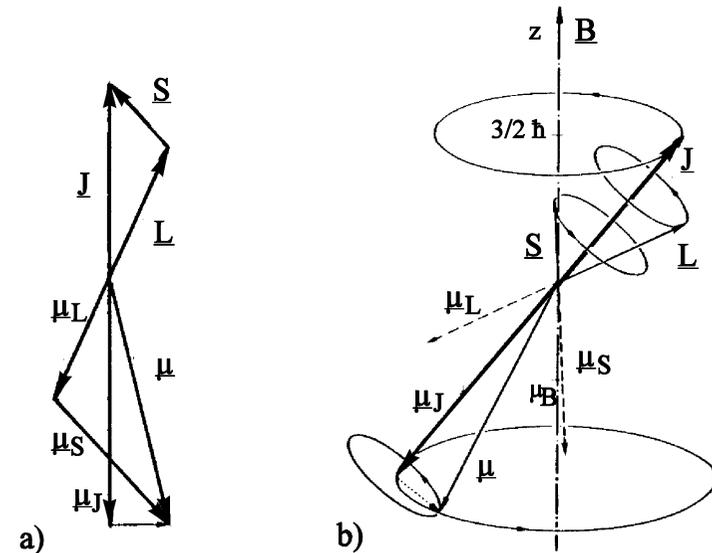
Das magnetische Moment  $\underline{\mu}_J$  der Elektronen ist im Falle der LS-Kopplung durch die Quantenzahlen  $J, L, S$  und  $M_J$  festgelegt und, ähnlich wie in Gln. (5) u. (6), mit Gln. (15) - (17) gegeben durch:

$$\underline{\mu}_J = -g_J \frac{\mu_B}{\hbar} \underline{J}, \quad \mu_{Jz} = -g_J \mu_B M_J \quad (19)$$

Die potentielle Energie  $E_{mJ}$  des Zustands im Magnetfeld  $B$  ist:

$$E_{mJ} = g_J M_J \mu_B B \quad (20)$$

Die Zahl der möglichen Niveaus wird durch die möglichen Werte von  $M_J$  bestimmt, der Energieabstand der Niveaus durch den *Landé-Faktor*  $g_J$  ( $g_L = 1 < g_J < g_S = 2$ ).  $g_J$  hängt von  $L, S$  und  $J$  ab und berücksichtigt die unterschiedliche Zusammensetzung von  $\underline{\mu}_J$  aus Spin- und Bahnmomenten.

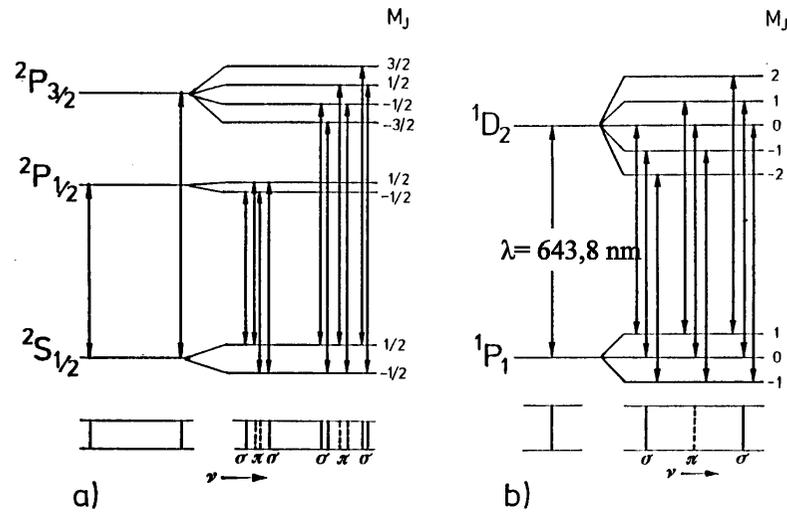


**Abb.2:** a) Drehimpulse und magn. Momente mit LS-Kopplung, b) Präzession der Drehimpulse u. magn. Momente beim Zeeman-Effekt ( $L=1, S=1/2, J=3/2, M_J=3/2$ )

Abb. 2a zeigt in einem Vektormodell die Zusammensetzung von  $\underline{J}$  und  $\underline{\mu}_J$  für den  $^2P_{3/2}$ -Zustand des Na-Atoms, Abb. 2b die Präzession von  $\underline{J}$  und  $\underline{\mu}_J$  um eine Achse parallel zu einem angelegten Magnetfeld.

Abb. 3a gibt in einem Niveauschema ein Beispiel für den anomalen Zeeman-Effekt wieder: die Aufspaltung des  $^2P - ^2S$ -Übergangs eines Alkaliatoms durch ein Magnetfeld. Man beobachtet die Aufspaltung der Doppellinie in 10 Komponenten. Viel einfacher ist der in Abb. 3b gezeigte *normale* Zeeman-Effekt beim  $^1D_2 - ^1P_1$ -Übergang des Cd, der auch in diesem Versuch untersucht wird. Man beobachtet

eine Aufspaltung in nur 3 Komponenten, obwohl insgesamt 9 Übergänge zwischen 8 verschiedenen Niveaus möglich sind. Dies liegt daran, dass die Aufspaltungen der Niveaus gleich sind, da in beiden Zuständen der Gesamtspin  $S$  verschwindet, also  $g_j = g_L = 1$  ist. Zum anderen sind i.a. nicht alle Übergänge zwischen den einzelnen Niveaus *erlaubt*, d.h. mit der Emission von Licht verbunden (s.u.).



**Abb.3:** Niveauschema u. Spektrum für a) anomalen Zeeman-Effekt beim  $^2P - ^2S$  - Übergang eines Alkali-Atoms, b) normalen Zeeman-Effekt beim  $^1D_2 - ^1P_1$  - Übergang des Cd. Bei Beobachtung  $\perp \underline{B}$  sind die  $\pi$ - und  $\sigma$ -Komponenten des Spektrums senkrecht zueinander linear polarisiert,  $\parallel \underline{B}$  sind die  $\sigma$ -Komponenten gegenläufig zirkular polarisiert, die  $\pi$ -Komponenten sind nicht sichtbar.

Erwähnt sei hier noch, dass der Zeeman-Effekt nicht für beliebig starke Magnetfelder auftritt. Wird die Aufspaltung der Energieniveaus mit steigendem Magnetfeld so groß, dass die verschiedenen Komponenten eines Multipletts sich überlagern, d.h. die Zeeman-Energie  $E_{m_j}$  größer wird als die Energie der Spin-Bahn-Kopplung, so wird die LS-Kopplung aufgehoben. Beide Vektoren  $\underline{L}$  und  $\underline{S}$  präzedieren dann unabhängig voneinander um die Feldrichtung und die Energieniveaus im Magnetfeld werden durch die Quantenzahlen  $M_L$  und  $M_S$  bestimmt. Dies nennt man *Paschen-Back-Effekt*.

## 2.6 Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung

Für die Übergänge der Elektronen gelten bestimmte *Auswahlregeln*. Das von den Atomen emittierte Licht ist im wesentlichen elektrische Dipolstrahlung. Dies bedeutet, dass das Atom während des Übergangs des Elektrons ein elektr. Dipolmoment besitzen muss. Hierfür müssen sich i.a. die Quantenzahlen  $\ell$  der Zustände um

$$\Delta \ell = \pm 1 \quad (21)$$

unterscheiden. Mit Berücksichtigung des Elektronenspins gilt für Mehrelektronensysteme:

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad (\text{außer } 0 \leftrightarrow 0) \quad (22)$$

$$\Delta L = 0, \pm 1, \quad \Delta S = 0 \quad (23)$$

Die Bedingungen für  $\Delta L$  und  $\Delta S$  gelten nur bei der LS-Kopplung. Für die Emission von elektr. Dipolstrahlung im Magnetfeld gilt zusätzlich die Auswahlregel:

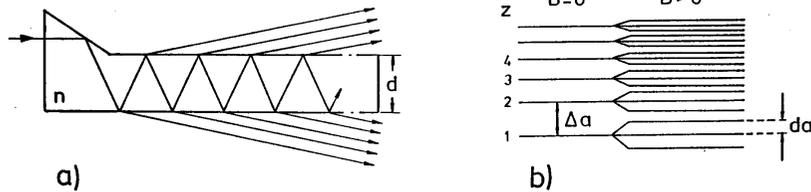
$$\Delta M_j = 0, \pm 1 \quad (24)$$

Man prüfe, ob diese Auswahlregeln für die in Abb. 3 gezeigten Beispiele erfüllt sind.

## 2.7 Spektroskopie mit der Lummer-Gehrcke-Platte

Die durch den Zeeman-Effekt bewirkte Aufspaltung  $d\lambda$  der Spektrallinien ist für Magnetfelder der Größenordnung 1 Tesla sehr gering ( $d\lambda/\lambda$  ca.  $10^{-5}$ ). Für die Beobachtung benötigt man einen Spektralapparat mit großem Auflösungsvermögen. Dieses erreicht man unter Ausnutzung der Interferenz des Lichtes in hoher Ordnung, d.h. bei optischer Weglängendifferenz von vielen Wellenlängen, im vorliegenden Versuch z.B. mit einer Lummer-Gehrcke-Platte.

Abb. 4a zeigt den Strahlengang durch die Lummer-Gehrcke-Platte: Das links in die Platte eintretende (divergente!) Lichtbündel wird am schrägen Teil ihrer Oberseite total, an ihren planparallelen Oberflächen teilweise reflektiert. Die Lichtstrahlen, welche bei den aufeinander folgenden Reflexionen an einer



**Abb.4:** Lummer-Gehrcke-Platte: a) Strahlengang, b) Interferenzlinien ohne bzw. mit Feld B beim normalen Zeeman-Effekt

Oberfläche (oben u. unten) zum Teil aus der Platte heraustreten, haben je nach Austrittswinkel einen Gangunterschied, der sie konstruktiv oder destruktiv interferieren lässt. Man beobachtet für eine feste Wellenlänge  $\lambda$  gleichzeitig eine Vielzahl horizontaler Linien (s. Abb. 4b), die den Interferenzmaxima verschiedener (beobachtbarer) Ordnungen  $z$  entsprechen. Der Abstand  $\Delta a$  der Linien ist nicht konstant, sondern ändert sich mit  $\sqrt{z}$ . Ändert sich die Wellenlänge des Lichts, so verschieben sich die Linien vertikal. Der Wellenlängenunterschied  $\Delta\lambda$ , der einer Verschiebung der Spektrallinie  $\lambda$  um gerade  $\Delta a$  entspricht, ist näherungsweise gegeben durch:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2d\sqrt{n^2 - 1}} \quad (25)$$

Dabei ist  $n$  der Brechungsindex der Lummer-Gehrcke-Platte,  $d$  ihre Dicke.

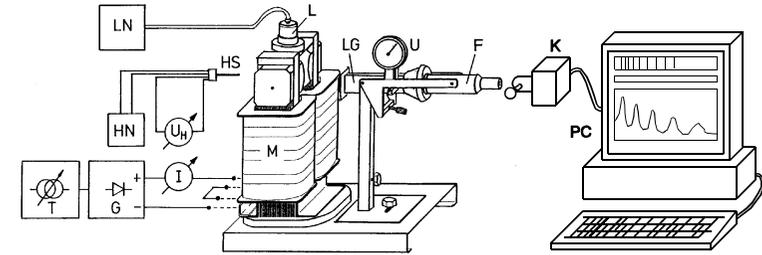
Ist die Spektrallinie  $\lambda$  durch den Zeeman-Effekt in drei Linien mit den Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda \pm d\lambda$  aufgespalten, beobachtet man eine in der jeweiligen Ordnung dazu proportionale Aufspaltung  $da = \Delta a d\lambda/\Delta\lambda$  der Interferenzlinien, so dass  $d\lambda = \Delta\lambda \cdot da/\Delta a$ . Mit Gl. (25) ist die entsprechende Frequenzverschiebung  $dv$ :

$$|dv| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{da}{\Delta a} \cdot \frac{c}{2d\sqrt{n^2 - 1}} \quad (26)$$

Die Bestimmung des Quotienten  $da/\Delta a$  ist im Versuch mit dem Fadenkreuzokular eines Beobachtungsfernrohrs und einer Messuhr oder mit einer angeschlossenen Zeilenkamera möglich.

### 3. Versuchsaufbau

Abb. 5 zeigt den Versuchsaufbau zum Zeeman-Effekt: Beobachtet wird die Aufspaltung der roten Cd-Linie ( $\lambda = 643,8 \text{ nm}$ ) senkrecht zur Feldrichtung.



**Abb.5:** Versuchsaufbau zum Zeeman-Effekt: Elektromagnet M mit Trafo T, Gleichrichter G und Strommesser I, Hallsonde HS mit Netzgerät HN u. Spannungsmesser  $U_H$ , Cd-Lampe L mit Netzgerät LN, Lummer-Gehrcke-Platte LG, Fernrohr F, Messuhr U, Zeilenkamera K und DOS-Rechner PC.

Zur Erzeugung des Feldes wird ein Elektromagnet benutzt, zwischen dessen Polschuhen eine Cd-Spektrallampe montiert ist. Die Stromversorgung des Magneten besteht aus einem Stelltransformator mit nachgeschaltetem Gleichrichter, an dessen Ausgang die Magnetspulen in Serie geschaltet sind. Das Magnetfeld zwischen den Polschuhen wird mit einer Hallsonde bestimmt.

Zur Beobachtung des Cd-Lichts ist neben dem Magneten die Lummer-Gehrcke-Platte in einem Gehäuse montiert, vor das ein Rotfilter geschoben werden kann. Hinter der Platte ist das im vertikalen Winkel verstellbare Beobachtungsfernrohr mit Fadenkreuzokular angebracht. Dessen relative Stellung zum Interferenzspektrum kann über eine Mikrometeruhr abgelesen werden. Um die Auswertung der Interferenzbilder zu erleichtern, wird eine digitale Zeilenkamera benutzt, die anstelle des Messokulars auf das Fernrohr gesteckt werden kann.

### 4. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie mit der Hallsonde die magnetische Induktion  $B$  zwischen den Polschuhen des Elektromagneten in Abhängigkeit vom Strom  $I$  der Magnetspulen.

- 2. Aufgabe:** Beobachten Sie das von der Cd-Lampe emittierte Licht mit der Lummer-Gehrcke-Platte. Bestimmen Sie die Positionen der Interferenzmaxima der roten Cd-Linie in 1. bis 10. Ordnung für  $B = 0$ .
- 3. Aufgabe:** Nehmen Sie die Interferenzspektren der Cadmium-Lampe für Spulenströme  $I = 0A$  sowie  $I = 7,5 - 17,5A$  in jeweils 2,5A-Schritten mit der Zeilenkamera auf.
- 4. Aufgabe:** Berechnen Sie mit den Ergebnissen der 1. bis 3. Aufgabe die mittlere Frequenzänderung  $\Delta\nu$  der verschobenen Komponenten der Spektrallinie in Abhängigkeit vom Magnetfeld  $B$ . Ermitteln Sie aus einer Auftragung  $\nu(B)$  graphisch eine Ausgleichsgerade und vergleichen Sie diese mit der Geraden für die Larmor - Frequenz  $\nu_L$ , (Gl. 12). Diskutieren Sie die Messergebnisse und schätzen Sie mögliche Fehler ab!

## 5. Versuchsdurchführung und Auswertung

### zu Aufgabe 1:

Aufbau der Schaltung gem. Abb. 5. Zur Bestimmung des Magnetfeldes  $B(I)$  am Ort der Cd-Lampe muss diese von den Polschuhen entfernt werden. Die Montage bzw. Demontage der Lampe ist **nur vom Betreuer** auszuführen! Die Hallsonde wird in die Mitte zwischen die Polschuhe gebracht und im Messbereich  $B > 100$  mT betrieben. Bestimmen Sie nach Einschalten der Magnetnetzgeräte Hallspannung und Magnetfeld  $B$  für Spulenströme zwischen 0 und 17,5A in 2,5A-Schritten mit steigender und fallender Stromstärke. (Anzeige. 100mV/10A) Der Spitzenstrom 17,5A sollte jeweils nur kurz eingestellt sein, um Netzgerät und Magnet nicht zu überlasten. Schätzen Sie danach durch leichtes Verschieben der Sonde bei mittlerem Spulenstrom die Inhomogenität des Feldes im Volumenbereich der Cd-Lampe ab. Tragen Sie zur Auswertung  $B(I)$  für beide Messreihen auf und zeichnen Sie eine Ausgleichskurve (Eichkurve) durch die Messpunkte.

### zu Aufgabe 2:

Nach Entfernen der Hallsonde und Montage der Cd-Lampe wird diese eingeschaltet und das von der Lummer-Gehrcke-Platte erzeugte obere Interferenzspektrum zunächst ohne Rotfilter mit dem Fernrohr beobachtet, gegebenenfalls die Optik mit Hilfe des Betreuers justiert. Schieben Sie danach vorsichtig das Rotfilter in die Halterung vor die Platte und fokussieren Sie das Spektrum erneut.

Bestimmen Sie nun für  $B = 0$  die Positionen  $a_z$  der Interferenzstreifen von der 1. (unten liegenden) bis zur 10. sichtbaren Ordnung  $z$ . Dazu wird das Fadenkreuz jeweils auf den unteren und oberen Rand einer Linie gestellt, und die Anzeige der Messuhr notiert. Als Position  $a_z$  einer Linie wird der Mittelwert der Anzeige benutzt. Tragen Sie  $a_z$  über  $\sqrt{z}$  auf und bestimmen Sie über eine Ausgleichsgerade die Abstände  $\Delta a_z = a_z - a_{z+1}$  für  $z = 1$  bis 5.

### zu Aufgabe 3:

Nach Entfernen des Fernrohr-Okulars wird die Zeilenkamera ganz auf den Tubus geschoben und so gedreht, dass die Anschlusskabel seitlich zur Wand zeigen. Anschließend wird sie mit der Klemmschraube handfest arretiert. Dann wird die Stromversorgung der Kamera eingesteckt und der DOS-Rechner angeschlossen.

Wechsel von C:> ins Unterverzeichnis C:\camera mit dem Befehl `cd camera`  
Gegebenenfalls Inhaltsverzeichnis ansehen mit dem Befehl `dir/p`  
Starten des Kameraprogramms mit dem Befehl `cclldemo`

Durch Hereinschieben des Shutterblechs in das Kameragehäuse wird die Kamerafront geöffnet. Es wird empfohlen, Cd-Lampe, Fernrohr und Kamera zur Abschirmung von Streulicht mit dem schwarzen Tuch abzudecken.

### Kamerabefehle:

Starten eines line-Scans: `l`

Danach erscheint im oberen Bildschirmbereich horizontal das Interferenzbild aus hellen und dunklen Streifen in 256 Graustufen.

Ein- / ausschalten des Zooms: `z`

Mit dem Zoom wird ein Bildbereich ausgewählt und im unteren Bildschirmbereich als Graph der 256 Graustufen dargestellt .

Verschieben des Zoombereichs nach links / rechts: `< / >`

Vergrößern / verkleinern der Empfindlichkeit (Integrationszeit): `↑ / ↓`

Optimum bei ca. 125 ms

Durch Verändern der Fernrohrneigung wird das Spektrum bei optimierter Integrationszeit ungefähr in symmetrische Lage gebracht. Die Spektren werden jedoch nur an einer Seite (z.B. links) aufgenommen, mit dem 1. (breiten) Maximum ( $z=1$ ) beginnend.

Vor Aufnahme des Spektrums im Nullfeld ( $I = 0A$ ) wird kurzfristig der Spulenstrom auf 15A (150 mV-Anzeige) gestellt, dann wieder auf 0A. Es sollte darauf ein "sauberes" Interferenzbild zu sehen sein.

Speichern eines Scans: *s*

(speichert jeweils die Dateien: line00i.dat und line00i.jpg mit laufender Zahl  $i = 1, 2, 3, \dots$  in das Verzeichnis C:\camera)

Notieren Sie zu jeder Zahl  $i$  die Parameter des jeweiligen Versuchsteils (eingestellter Spulenstrom  $I$  bzw. Bemerkungen).

Nach der Aufnahme und Speicherung der Spektren bei verschiedenen Spulenströmen  $I$  wird nochmal ein Nullfeld-Spektrum aufgenommen und gespeichert.

Danach:

Verlassen des line scans / Kameraprogramms: *esc / esc*

Schließen (herausziehen) des Shutterblechs, Herausziehen der Kameraströmerversorgung, Abtrennen der Kamera vom Fernrohr.

Starten des Dateibearbeitungsprogramms: *VC* (Volkov Commander)

Menuanweisungen befolgen: Kopieren der Messdateien auf Diskette (A:\ ...)

#### zu Aufgabe 4:

Die Dateien können entweder zuhause auf dem eigenem PC ausgewertet werden oder im Praktikum, Raum ME 142, zur weiteren Auswertung als Graphen ausgedruckt werden.

Hierfür ist nach Einschalten des Druckers und Hochfahren von Windows das Grafik-Programm *Origin* zu starten.

Im (anfängs) leeren Dateifenster sind durch Ziehen mit gedrückter Maus über die Kopfzeilen zwei Spalten (A u. B) zu markieren. Im File-Menu wird *Import ASCII* gewählt, dann im Ordner A (3.5" Diskette) die entsprechende Datei, z.B. line001.dat geöffnet. Es erscheint in Spalte A die Zeilenpixelnr., in Spalte B der entsprechende Graustufenwert.

Zum Erzeugen eines Graphen wird Spalte B markiert und im Menu *Plot Line* ausgewählt. Es erscheint der Linienplot B(A). Zur genaueren Auswertung wird im Plot nach Aktivierung der Zoomfunktion (Lupe) mit gedrückter Maus diagonal ein Bereichsfenster ausgewählt, das die Interferenzmaxima von 1. bis ca. 8. Ordnung einschließt. In dieses Fenster werden nach Aktivierung des Texttools (T) durch Mausclick an der gewünschten Stelle Angaben zum Versuchsteil wie Spulenstrom etc. eingetragen. Anschließend wird der Graph zur (späteren) graphischen Auswertung im File-Menu mit dem Befehl *Print* auf dem Laserdrucker ausgedruckt.

Zum Ausdrucken der nächsten Datei ist im File-Menu *New project* zu wählen

und wie zuvor zu verfahren. Am Schluss wird das Programm im File-Menu mit *Exit* geschlossen, Windows beendet und der Rechner sowie Drucker ausgeschaltet.

In der Auswertung der Spektren wird für jedes Intervall zwischen zwei Hauptmaxima jeweils der Abstand  $\Delta a$  und der Mittelwert der Abstände  $d_a$  der Nebenmaxima zum jeweils nächsten Hauptmaximum bestimmt, dann das Verhältnis  $d_a / \Delta a$  gebildet. Schließlich wird der Mittelwert der Verhältnisse für alle ausgemessenen Intervalle bestimmt. Mit Gl. (26) der Anleitung und der Eichkurve  $I(B)$  wird die Frequenzverschiebung  $dv(B)$  bestimmt.

Lummer-Gehrcke-Platte: Brechungsindex  $n = 1,4567$   
Dicke  $d = 4,04$  mm

Tragen Sie  $dv(B)$  über  $B$  auf und bestimmen Sie eine Ausgleichsgerade. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Geraden  $v_L(B)$  und diskutieren Sie systematische und unsystematische Fehlerquellen (Fehlerabschätzung).

#### 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche *Quantenzahlen* beschreiben die Zustände eines einzelnen Elektrons im Atom, welche seine *potentielle Energie* im Magnetfeld?
- 2) Welche beiden *Kopplungstypen* sind bei Mehrelektronensystemen wichtig, bei welchen Atomen treten sie hauptsächlich auf und welche Wechselwirkungen sind dabei wesentlich? Erläutern Sie die Kopplungstypen!
- 3) Wie setzt sich der *Gesamtdrehimpuls* bei Mehrelektronensystemen im Fall der LS-Kopplung zusammen? Durch welche Quantenzahlen wird er bei dieser Kopplung beschrieben?
- 4) Was ist ein (*Term*-) *Multiplett*? Erläutern Sie die *Termsymbole*!
- 5) Welche Größen bestimmen bei der LS-Kopplung die z-Komponente des gesamten *magn. Moments* von Mehrelektronensystemen?
- 6) Welcher Übergang des Cd emittiert die Linie  $\lambda = 643,8$  nm ?
- 7) Was versteht man unter *normalem*, was unter *anomalem Zeeman-Effekt*? Wann tritt der eine, wann der andere auf?
- 8) Wie lauten die *Auswahlregeln* für elektr. *Dipolstrahlung*, speziell für den normalen Zeeman-Effekt beim Cd?
- 9) Erklären Sie die Entstehung der Interferenzlinien bei der *Lummer-Gehrcke-Platte*!

## Versuch D 17: Elektronenspinresonanz

**1. Literatur:** Gerthsen/Kneser/Vogel, Physik  
Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik,  
Bd. IV,1: Aufbau der Materie  
Kittel, Einführung in die Festkörperphysik

**Stichworte:** Atombau u. Quantenzahlen; Bahndrehimpuls, Spin u. magn. Momente von Ein- u. Mehrelektronensystemen; Kopplung atomarer Drehimpulse, Atome im Magnetfeld: Larmor-Präzession, Zeeman-Aufspaltung, Elektronenspinresonanz, Wechselwirkungen magnetischer Momente

### 2. Grundlagen

#### 2.1 Einleitung

Seit ihrer Entdeckung durch E.K. Zavoisky (1945) hat sich die Elektronenspinresonanz (ESR) zu einer wichtigen Methode zur Untersuchung von Molekül- und Kristallstrukturen, von chemischen Reaktionen und anderen Problemstellungen in Physik, Chemie, Biologie und Medizin entwickelt. Sie beruht auf der Absorption hochfrequenter elektromagnetischer Strahlung durch paramagnetische Stoffe in einem äußeren Magnetfeld, in dem die Spinzustände der Elektronen energetisch aufspalten. Dabei finden Übergänge zwischen den Spinzuständen statt, wenn ihre Energiedifferenz  $\Delta E$  der Photonenenergie  $h\nu$  der hochfrequenten Strahlung entspricht.

Die Elektronenspinresonanz ist auf paramagnetische Stoffe begrenzt, bei denen die Bahndrehimpulse und Spins zu einem von Null verschiedenen Gesamtdrehimpuls koppeln. Geeignet sind z.B. Verbindungen, in denen Atome mit nicht aufgefüllten (inneren) Schalen (Übergangsmetalle, Seltene Erden) eingebaut sind, organische Moleküle mit freien Radikalen, die einzelne ungepaarte Elektronen enthalten, oder Kristalle mit paramagnetischen Gitterfehlstellen.

#### 2.2 Atomare Quantenzahlen, Drehimpulse, magnetische Momente

Die Energiezustände der Elektronen eines Atoms sind durch jeweils einen spezifischen Satz von Quantenzahlen gekennzeichnet:

Die *Hauptquantenzahl*  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) beschreibt die Anordnung der Elektronen in konzentrischen Schalen um den Atomkern.  $n = 1$  kennzeichnet die innerste,

energetisch niedrigste Schale, die K-Schale,  $n = 2, 3, \dots$  die darauf folgenden, energetisch höheren Schalen (L-, M-Schale usw.).

Die *Neben- oder Bahnquantenzahl*  $\ell$  ( $\ell = 0, 1, \dots, n - 1$ ) legt die Symmetrie der Ladungsverteilung eines Elektrons um den Atomkern fest.  $\ell = 0$  bedeutet Kugelsymmetrie (s-Zustand).  $\ell = 1, 2, \dots$  (p-, d-Zustand usw.) entspricht im Bild des Bohr-Sommerfeldschen Atommodells einem Zustand des Elektrons mit Bahndrehimpuls  $\underline{\ell}$  vom Betrag

$$|\underline{\ell}| = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \hbar, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (1)$$

Die *magnetische Bahnquantenzahl*  $m_\ell$  ( $m_\ell = \ell, \ell - 1, \dots, -\ell$ ) kennzeichnet die Orientierung der Ladungsverteilung bezüglich einer von außen (z.B. durch ein Magnetfeld) vorgegebenen Richtung  $z$ . Die  $z$ -Komponente  $\ell_z$  des Bahndrehimpulses kann nur  $2\ell + 1$  mögliche, durch  $m_\ell$  festgelegte Werte haben:

$$\ell_z = m_\ell \hbar \quad (2)$$

Die *Spinquantenzahl*  $s$  ( $s = 1/2$ ) beschreibt den Spin oder - in formaler Analogie zum Bahndrehimpuls - den *Eigendrehimpuls*  $\underline{s}$  des Elektrons vom Betrag

$$|\underline{s}| = \sqrt{s(s + 1)} \hbar = \frac{1}{2}\sqrt{3} \hbar \quad (3)$$

Die *magnetische Spinquantenzahl*  $m_s$  ( $m_s = \pm 1/2$ ) legt die Größe der  $z$ -Komponente  $s_z$  des Elektronenspins bezüglich einer vorgegebenen Richtung fest:

$$s_z = m_s \hbar = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (4)$$

Mit dem Bahndrehimpuls und Spin des Elektrons sind entsprechende magnetische Dipolmomente\*  $\underline{\mu}_\ell$  und  $\underline{\mu}_s$  verknüpft:

---

\*) Das magn. Moment  $\mu$  wird hier in der Ampereschen Definition benutzt:  
 $\mu_{(A)} = M V$ ; ( $B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 H + I$ ). In der Coulombschen Definition ist  
 $\mu_{(C)} = I V = \mu_0 \mu_{(A)}$ .

$$\underline{\mu}_\ell = \gamma_\ell \underline{\ell} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \underline{\ell}, \quad \mu_{\ell z} = \gamma_\ell \ell_z = -\mu_B m_\ell \quad (5)$$

$$\underline{\mu}_s = \gamma_s \underline{s} \approx -\frac{2\mu_B}{\hbar} \underline{s}, \quad \mu_{sz} = \gamma_s s_z \approx -2\mu_B m_s \quad (6)$$

Das Verhältnis  $\gamma_\ell = -\mu_B / \hbar$  bzw.  $\gamma_s = -2\mu_B / \hbar$  nennt man *gyromagnetisches Verhältnis* von Bahndrehimpuls bzw. Spin,  $\mu_B = e \hbar / 2m = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A m}^2$  ist das *Bohrsche Magneton*, die atomare Einheit für das magnetische Moment.  $\underline{\mu}_\ell$  und  $\underline{\mu}_s$  sind wegen der negativen Elementarladung dem Drehimpuls und Spin entgegengerichtet und wie diese durch die Quantenzahlen  $\ell$ ,  $m_\ell$ ,  $s$  und  $m_s$  festgelegt.

### 2.3 Addition von Drehimpulsen, Mehrelektronensysteme:

Die magnetischen Momente  $\underline{\mu}_\ell$  und  $\underline{\mu}_s$  sind wie  $\underline{\ell}$  und  $\underline{s}$  nicht unabhängig voneinander. Ein den Atomkern *umkreisendes* Elektron *sieht* den *Kreisstrom* der Kernladung, der am Ort des Elektrons ein Magnetfeld erzeugt, in welchem sich sein Spinnmoment ausrichtet. Man nennt diese Wechselwirkung *Spin-Bahn-Kopplung*. Diese bewirkt, dass sich Bahndrehimpuls und Spin des Elektrons und die damit verbundenen magnetischen Momente auf verschiedene Weise zu einem (unterschiedlichen) Gesamtdrehimpuls  $\underline{j}$  bzw. Gesamtmoment  $\underline{\mu}_j$  addieren.

Wir betrachten im Folgenden nicht nur ein einzelnes Elektron sondern alle Elektronen der äußeren Schale eines Atoms. Für diese Elektronen ist eine weitere Wechselwirkung, ihre gegenseitige *Coulomb-Abstoßung* wesentlich. Diese führt dazu, dass jeweils die Drehimpulse  $\underline{\ell}_i$  und die Spins  $\underline{s}_i$  der einzelnen Elektronen untereinander gekoppelt sind.

Vor allem bei den leichten Elementen und denen mit wenigen Elektronen auf der äußeren Schale ist die Spin-Bahn-Kopplung schwach im Vergleich zur Coulomb-Abstoßung. Hier addieren sich zunächst die Bahndrehimpulse  $\underline{\ell}_i$  und Spins  $\underline{s}_i$  der einzelnen Elektronen zum Gesamtbahndrehimpuls  $\underline{L}$  und Gesamtspin  $\underline{S}$  und diese wiederum zum Gesamtdrehimpuls  $\underline{J}$ :

$$\underline{L} = \sum \underline{\ell}_i, \quad \underline{S} = \sum \underline{s}_i, \quad \underline{J} = \underline{L} + \underline{S} \quad (7)$$

Man nennt dies *LS-Kopplung* oder nach ihren Entdeckern *Russell-Saunders-Kopplung*. Der Gesamtdrehimpuls  $\underline{J}$  ist in diesem Fall durch die Quantenzahlen  $J$  und  $M_J$  bestimmt mit:

$$|\underline{J}| = \sqrt{J(J+1)} \hbar, \quad J_z = M_J \hbar, \quad M_J = J, J-1, \dots, -J \quad (8)$$

$$J = L + S, \quad L + S - 1, \dots, L - S \quad (L > S)$$

Das resultierende magnetische Moment  $\underline{\mu}_J$  bzw.  $\mu_{Jz}$  der Elektronen ist durch die Quantenzahlen  $J$ ,  $L$ ,  $S$  und  $M_J$  festgelegt und gegeben durch:

$$\underline{\mu}_J = -g_J \frac{\mu_B}{\hbar} \underline{J}, \quad \mu_{Jz} = -g_J \mu_B M_J \quad (9)$$

Der sog. *Landé-Faktor*  $g_J$  gibt an, wie das magnetische Moment  $\underline{\mu}_J$  aus Bahn- und Spinnmagnetismus gemischt ist. Für  $L = 0$  ist  $g_J = 2$ , für  $S = 0$  ist  $g_J = 1$ .

### 2.4 Energie der Elektronen im Magnetfeld

Ein magnetischer Dipol  $\underline{\mu}$  hat in einem Magnetfeld  $\underline{B}$  die potentielle Energie  $E = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}$ . Die potentielle Energie  $E_{MJ}$  der betrachteten Atomelektronen ist infolge des Moments  $\underline{\mu}_J$  mit Gl. (9) damit:

$$E_{MJ} = g_J M_J \mu_B B \quad (10)$$

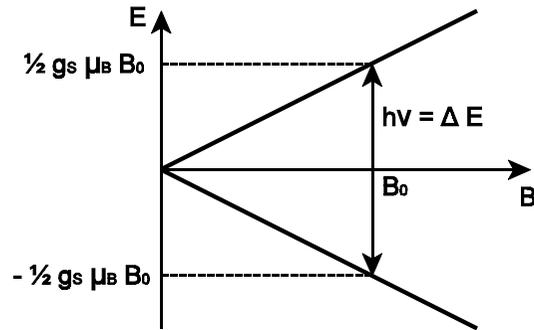
Die Energie  $E_{MJ}$  hat also  $2J + 1$  diskrete, durch  $M_J$  festgelegte Werte, die sich jeweils um die Energie  $\Delta E = g_J \mu_B B$  unterscheiden. Im Feld  $B = 0$  sind die Energiezustände  $E_{MJ}$  entartet, im endlichen Feld  $B$  proportional zu  $B$  aufgespalten. Man spricht auch von einer *Zeeman-Aufspaltung* der Energieniveaus (s. Versuch D15: *Zeeman-Effekt*). Energetische Übergänge sind nur zwischen benachbarten Zeeman-Niveaus erlaubt, es gilt also die Auswahlregel:  $\Delta M_J = \pm 1$ .

$$\Delta E_{MJ} = g_J \mu_B B \quad (11)$$

In zahlreichen Verbindungen spielt der Bahndrehimpuls eine untergeordnete Rolle und die Betrachtung kann sich auf den Spin der Elektronen beschränken. Für ein einzelnes "freies" Elektron ist  $J = s = 1/2$ ,  $M_J = m_s = \pm 1/2$ ,  $g_s = 2$ <sup>1)</sup> und damit

1) Der Landé-Faktor eines freien Elektrons ist genauer:  $g_s = 2,0023$ .

$$E_{m_s} = g_s m_s \mu_B B = \begin{cases} \frac{1}{2} g_s \mu_B B & \text{für } m_s = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} g_s \mu_B B & \text{für } m_s = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (12)$$



**Abb. 1:** Zeeman-Aufspaltung der Energie eines Elektrons mit Spin  $\underline{s}$  und magnetischem Spinnmoment  $\underline{\mu}_s$  im Magnetfeld  $B$  mit Resonanzübergang bei  $B_0$  durch Absorption der Photonenenergie  $h\nu = g_s \mu_B B_0$

Abb.1 zeigt das Energieschema der Zeeman-Aufspaltung eines freien Elektrons mit Spin  $\underline{s}$  und Spinnmoment  $\underline{\mu}_s$  im Magnetfeld  $B$ . Für einen Übergang aus dem energetisch tieferen in den höheren Energiezustand ist im Feld  $B_0$  die Aufnahme der Energie  $\Delta E = g_s \mu_B B_0$  nötig. Diese wird durch die Absorption elektromagnetischer Strahlung der Frequenz  $\nu$  bzw. Photonenenergie  $h\nu = \Delta E$  ermöglicht. Für den allgemeinen Fall gilt also mit Gl. (11) die Resonanzbedingung

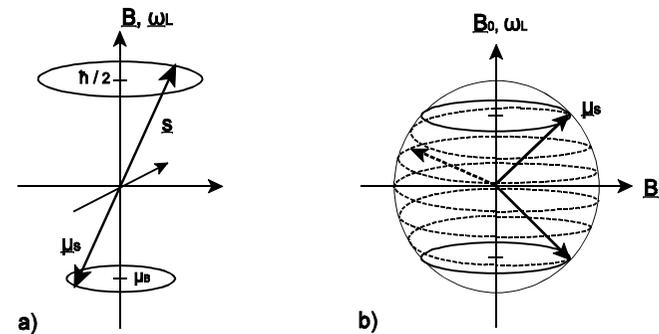
$$h\nu = \Delta E_{MJ} = g_J \mu_B B \quad (13)$$

### 2.5 Resonanzabsorption, Elektronenspinresonanz

Um qualitativ die Resonanzabsorption sowie die experimentelle Anordnung des vorliegenden Experiments (s.u.) zu veranschaulichen, wird das Modell eines klassischen Magnetkreisels mit Drehimpuls und gekoppeltem magnetischem Moment betrachtet.

Abb. 2a illustriert die *Larmor-Präzession* eines klassischen Magnetkreisels im  $B$ -Feld. Fasst man den Elektronenspin  $\underline{s}$  und das antiparallel zu  $\underline{s}$  liegende Moment  $\underline{\mu}_s = \gamma_s \underline{s}$  als solchen Magnetkreislauf auf, so erfahren  $\underline{\mu}_s$  und  $\underline{s}$  infolge  $\underline{B}$  ein Drehmoment  $\underline{M}$ , demzufolge sich die Richtung von  $\underline{s}$  und  $\underline{\mu}_s$  durch ihre Präzession um  $\underline{B}$  mit der *Larmor-Kreisfrequenz*  $\omega_L$  ändert.

$$\underline{M} = \underline{\mu}_s \times \underline{B} = \frac{d\underline{s}}{dt} = \underline{\omega}_L \times \underline{s}, \quad \omega_L = |\gamma_s| B = \frac{2\mu_B}{\hbar} B \quad (14)$$



**Abb.2:** a) Larmor-Präzession von Spin  $\underline{s}$  und Moment  $\underline{\mu}_s$  mit der Kreisfrequenz  $\omega_L$  um die Feldrichtung  $B$ ; b) Resonanzübergang des Moments  $\underline{\mu}_s$  im Gleichfeld  $B_0$  und Hochfrequenzfeld  $B_1$

Für die Larmor-Frequenz  $\nu_L = \omega_L / 2\pi$  des freien Elektronenspins ergibt sich:

$$\nu_L / B \approx 28 \text{ GHz} / \text{T}.$$

Besteht, wie in Abb. 2b angedeutet, neben dem in z-Richtung weisenden statischen Feld  $B_0$  ein in x-Richtung weisendes hochfrequentes Magnetfeld  $B_1$  der Kreisfrequenz  $\omega_L$ , also

$$B_1 = B_{10} \sin(\omega_L t + \alpha), \quad (15)$$

so wirkt (bei geeignetem Phasenwinkel  $\alpha$ ) ein weiteres Drehmoment  $M_1$  senkrecht zu  $M$ , welches den Winkel zwischen  $\underline{B}_0$  und  $\underline{\mu}_s$  ändert. Die Spitze des Vektors  $\underline{\mu}_s$  bewegt sich, wie in Abb. 2b angedeutet, auf einer Kugeloberfläche längs einer Spirale. Unter Energieaufnahme aus dem hochfrequenten Magnetfeld  $B_1$  erhöht

sich die potentielle (Einstell-) Energie des Moments  $\underline{\mu}_s$  im Magnetfeld  $B_0$  stetig. Aufgrund der Quantennatur des Elektronenspins, d.h. der Richtungsquantelung von  $\underline{s}$  und  $\underline{\mu}_s$  ist der Übergang jedoch nicht wie im klassischen Bild stetig, sondern erfolgt diskontinuierlich, abrupt.

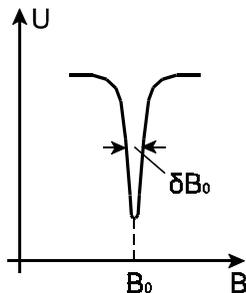
Wären in einer makroskopischen Probe mit vielen Spins die in Abb.1 skizzierten Energieniveaus mit gleicher Anzahl von Elektronen besetzt, würde ein hochfrequentes Magnetfeld geeigneter Frequenz keine Resonanzabsorption bewirken, da aufgrund der verschiedenen Phasenwinkel zum HF-Feld gleich viele Elektronen Energie an das HF-Feld abgeben wie von ihm aufnehmen.

Da sich die Probe jedoch im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung der Elektronen bei endlicher Temperatur T befindet, besteht ein von eins verschiedenes Verhältnis der Besetzungszahlen  $N_1$  zu  $N_2$  von angeregtem Zustand zum Grundzustand entsprechend dem Energieunterschied  $\Delta E$  dieser Zustände:

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \quad (16)$$

Hierbei ist  $k_B$  die Boltzmann-Konstante. Bei Raumtemperatur und einem B-Feld von 1 T ist  $N_1/N_2 = 0,997$ , also  $\Delta N/N \approx 3 \times 10^{-3}$ . Bei einem B-Feld von ca. 4 mT, wie es im vorliegenden Versuch verwendet wird, ist  $\Delta N/N$  nur noch ca.  $10^{-5}$ . Gleichwohl reicht dieser geringe Besetzungsunterschied aus, um die Energieabsorption aus dem HF-Feld nachzuweisen.

Misst man die aus dem HF-Feld absorbierte Energie bei fester Frequenz  $\nu_0$  als Funktion des Magnetfeldes B, so zeigt, wie in Abb. 3 skizziert, die Signalspannung U (s. Versuchsschaltung unten) bei dem Resonanzfeld  $B_0$  keine beliebig scharfe Absorptionlinie sondern eine *Absorptionskurve* (Lorentz-Kurve, s. u.a. Versuch C3: *Analyse akustischer und elektrischer Schwingungen*) mit einer bestimmten *Halbwertsbreite*  $\delta B_0$ .



**Abb. 3:**  
Absorptionskurve der Signalspannung U(B) beim Feld  $B_0$  mit Halbwertsbreite  $\delta B_0$

Diese Halbwertsbreite  $\delta B_0$  ist im einfachsten Fall für ein homogenes Magnetfeld Ausdruck der Energieunschärfe  $\delta E$  des angeregten Zustandes. Aufgrund der *Heisenbergschen Unschärferelation*

$$\delta E \tau \geq \frac{\hbar}{2} \quad (17)$$

ist mit der *Lebensdauer*  $\tau$  des angeregten Zustandes auch die Energiedifferenz  $\Delta E$  zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand über Gl. (11) mit der Unschärfe

$$\delta E = g_J \mu_B \delta B_0 \quad (18)$$

behaftet. Damit ist

$$\delta B_0 = \frac{\hbar}{2 g_J \mu_B \tau} \quad (19)$$

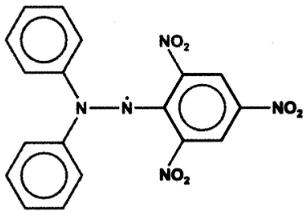
unabhängig von der Resonanzfrequenz  $\nu_0$ .

Bei Messungen der ESR an einer Probe wird bei fester Frequenz  $\nu_0$  die Lage ( $B_0$ ) und Breite ( $\delta B_0$ ) der Resonanzkurve ausgewertet. Aus der Lage wird mit Gl. (13) der g-Faktor bestimmt. Er liegt bei einem freien Atom oder Ion zwischen  $g_J = 1$  für reinen Bahnmagnetismus und  $g_J \approx 2,0023$  für reinen Spinnmagnetismus. Tatsächlich sind die mit der Spinresonanz untersuchten paramagnetischen Zentren nicht frei. In ein Kristallgitter eingebaut oder in einer Lösung von einer Solvathülle umgeben, wirken starke elektrische und magnetische Felder auf sie, die von den Atomen der Umgebung erzeugt werden. Diese Felder bewirken eine Energieverschiebung und beeinflussen die Zeeman-Aufspaltung der Elektronen. Dadurch ändert sich der Wert des g-Faktors, er wird häufig anisotrop, und in den ESR-Spektren tritt eine Feinstruktur auf. Es lassen sich also aus dem g-Faktor Rückschlüsse auf die Bindungsverhältnisse der Elektronen und den chemischen Aufbau der untersuchten Probe ziehen.

Aus der Linienbreite der Resonanz können Aussagen über dynamische Eigenschaften gewonnen werden. Sieht man von nicht aufgelöster Feinstruktur der Spektren ab, wird die Linienbreite durch mehrere Prozesse bestimmt, die der Ausrichtung der magnetischen Momente entgegenwirken. Als *Spin-Spin-Relaxation* bezeichnet man die Wechselwirkung der magnetischen Momente untereinander, als *Spin-Gitter-Relaxation* die Wechselwirkung der Momente mit fluktuierenden elektrischen und magnetischen Feldern aufgrund der Gitterschwingungen in Festkörpern oder thermischen Bewegungen von Atomen in Flüssigkeiten. In einigen Fällen wird die Linienbreite durch die sog.

Austauschwechselwirkung beeinflusst, so dass sie erheblich kleiner ist als bei reiner *Dipol-Dipol-Wechselwirkung* zwischen den magnetischen Momenten zu erwarten wäre.

Als Probensubstanz wird im vorliegenden Versuch 1,1-Diphenyl-2-Pikryl-Hydrazil (DPPH) verwendet. Diese organische Verbindung hat ein relativ stabiles freies Radikal, das an einem Atom der Stickstoffbrücke ein ungepaartes Valenzelektron aufweist (s. Abb. 4)

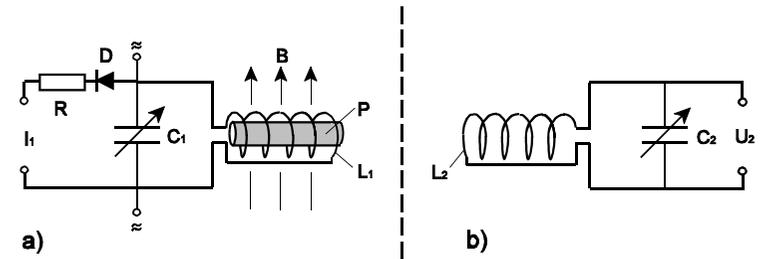


**Abb. 4:**  
Chemische Struktur von DPPH

Dessen Bahnbewegung ist durch den Molekülaufbau praktisch ausgelöscht. Daher hat das Molekül einen g-Faktor, der fast dem eines freien Elektrons entspricht. Die Substanz ist in polykristalliner Form für die Demonstration der Elektronenspinresonanz sehr gut geeignet, da sie eine intensive ESR-Linie besitzt, die wegen der Austauschverschmälerung eine geringe Breite aufweist.

Für praktische Anwendungen entwickelte ESR-Spektrometer arbeiten hauptsächlich bei Frequenzen von etwa 10 GHz (Mikrowellen, X-Band). Die Magnetfelder liegen entsprechend in der Größenordnung 0,1 bis 1 T. Im vorliegenden Versuch ist das Magnetfeld deutlich schwächer. Es wird mithilfe zweier Helmholtz-Spulen erzeugt und kann zwischen 0 und ca. 4 mT eingestellt werden. Einem konstanten Spulenstrom wird ein 50 Hz-Wechselstrom überlagert. Somit setzt sich das entsprechend modulierte Magnetfeld B zusammen aus einem Gleichfeld und einem 50 Hz-Feld.

Abb. 5a zeigt die Prinzipschaltung der im Versuch benutzten experimentellen Anordnung zum Nachweis der Elektronenspinresonanz. Ein Parallelschwingkreis  $C_1 - L_1$  hoher Güte (s. z.B. Versuch C8/9: *Wechselstromwiderstände und Reihenresonanz*) wird durch Verändern der Kapazität des Drehkondensators  $C_1$  bei einer vorgegebenen Resonanzfrequenz  $\nu_0$  betrieben. In der Spule  $L_1$  befindet sich die zylindrische Probe P. Das transversal zum Probenzylinder liegende Magnetfeld B wird so eingestellt, dass das Gleichfeld etwa dem Resonanzfeld  $B_0$  entspricht und infolge der 50 Hz-Modulation die Resonanzbedingung  $h\nu_0 = g\mu_B B_0$  mit 100 Hz periodisch erfüllt wird. Im Falle der Resonanz wird jedesmal der Schwingkreis infolge der Energieabsorption durch die Probe gedämpft, so dass



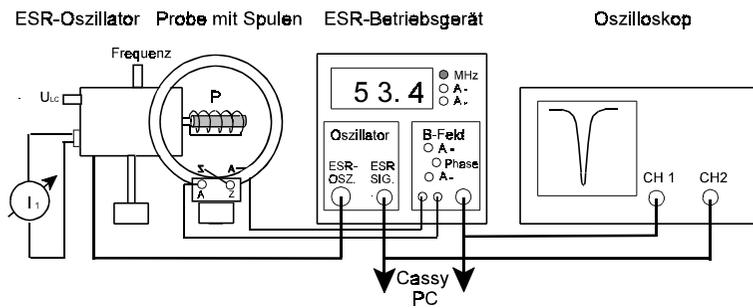
**Abb. 5:** a) Schaltbild zum experimentellen Nachweis der Resonanzabsorption in der Probe P über die Dämpfung des resonanten HF-Schwingkreises  $C_1 - L_1$ ; b) Dämpfung alternativ zu P durch einen resonanten passiven Schwingkreis  $C_2 - L_2$ . Näheres siehe Text.

sich die Güte des Schwingkreises und die über  $L_1$  bzw.  $C_1$  bestehende Spannung  $U_1$  verringert. Diese Spannung wird mittels einer Diode gleichgerichtet und als Strom  $I_1$  durch den Widerstand R gemessen bzw. verstärkt als Funktion des Magnetfeldes registriert (s. Signalspannung, Abb.3).

Abb. 5b erläutert, dass alternativ zur Probe P auch ein auf die gleiche Frequenz  $\nu_0$  abgestimmter passiver Schwingkreis  $C_2 - L_2$  dem Schwingkreis  $C_1 - L_1$  über induktive Kopplung Energie entziehen und ihn damit dämpfen kann. Dies wird im vorliegenden Versuch ebenfalls untersucht.

### 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Untersuchen Sie die frequenzabhängige Dämpfung des ESR-Resonanz-Schwingkreises durch einen induktiv gekoppelten, passiven Schwingkreis für zwei verschiedene Eigenfrequenzen dieses Schwingkreises.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie für verschiedene Frequenzen  $\nu_0$  die jeweiligen Spinresonanzfelder  $B_0(\nu_0)$  einer polykristallinen DPPH-Probe und berechnen Sie aus dem Ergebnis den g-Faktor von DPPH.
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie aus den in der 2. Aufgabe aufgenommenen Resonanzkurven der Signalspannung  $U_s(B)$  für DPPH die jeweiligen Halbwertsbreiten  $\delta B_0$  der Resonanzfelder sowie den Mittelwert für  $\delta B_0$ . Vergleichen Sie den g-Faktor und  $\delta B_0$  mit Literaturdaten für DPPH.



**Abb. 6:** Versuchsaufbau schematisch: ESR-Oszillator, Probe mit Helmholtz-Spulen, ESR-Betriebsgerät und Zweikanal-30 MHz-Oszilloskop; parallele Aufzeichnung der Spannungen  $U_S$ ,  $U_B$  über Cassy auf PC

#### 4. Versuchsaufbau

Den Versuchsaufbau zeigt Abb. 6 schematisch. Links der HF-Oszillator mit der Probenspule, die sich in der Mitte der Helmholtzspulen befindet. An der Oberseite des Oszillators kann die Frequenz (ca. 30 - 75 MHz) eingestellt werden, an der Rückseite kann die Hf-Amplitude eingeschaltet bzw. eingestellt werden. Der Stromausgang ( $I_1$ ) gestattet die Bestimmung der Spannung  $U_{I_1}$ .

Das ESR-Betriebsgerät in der Mitte dient mit der Einheit *Oszillator* zur Stromversorgung und Signalverstärkung des Oszillators und besitzt einen Signalausgang  $U_S$  der verstärkten Oszillatorspannung  $U_{I_1}$ , der sowohl an ein Oszilloskop rechts (CH 2) wie an den Cassy-Interface-Eingang  $U_{BI}$  zur digitalen Registrierung angeschlossen ist. Die Einheit *B-Feld* des Betriebsgerätes dient zur Stromversorgung der Helmholtz-Spulen. An der Frontseite der Einheit sind die Gleichfeldstromstärke  $I_{\bar{}}$  (max. 1,5 A) bzw. die Wechselfeldstromstärke  $I_{\approx}$  (max ca.  $0,33 A_{eff}$ ) des Stroms durch die in Reihe geschalteten Spulen einstellbar. Ein Signalausgang der Einheit liefert eine zum Strom  $I(t)$  durch die Spulen proportionale Spannung  $U_B \approx 6,1 \times I(t)$  V/A. Er ist am Oszilloskop (CH 1) und am Interface-Eingang  $U_{AI}$  zur Registrierung angeschlossen. Ein zusätzlicher Regler *Phase* der Einheit ermöglicht es, die zeitliche Verzögerung des Strom-Signalausgangs relativ zum ESR-Signalausgang am Oszilloskop bzw. PC auszugleichen. Die Digitalanzeige des Betriebsgerätes ermöglicht durch Knopfdruck von der Anzeige der Frequenz  $\nu$  (MHz) auf die der Gleichfeldstromstärke  $I_{\bar{}}$  (A) sowie die der eff. Wechselfeldstromstärke  $I_{\approx}$  ( $A_{eff}$ ) umzuschalten.

#### 5. Versuchsdurchführung und Auswertung

##### zu Aufgabe 1

Ziel des Versuchsteils ist nachzuweisen, dass ein passiver Schwingkreis (d.h. einer ohne internen Ausgleich seiner Energieverluste), ähnlich einer Probe, im Falle der Resonanz mit einem aktiven Schwingkreis diesem maximal Energie entzieht und damit dessen Güte bzw. dessen (bei einem Parallelschwingkreis) in der Resonanz hohe Oszillatorspannung deutlich verringert.

Stellen Sie dazu den an das Betriebsgerät angeschlossenen ESR-Oszillator mit am  $I_1$ -Stromausgang angeschlossenen  $\mu$ A-Meter ( $100\mu$ A) ohne Probe außerhalb der Helmholtz-Spulen auf. Verbinden Sie den Anschluss  $U_2$  von Kondensator bzw. Spule des auf einem Stativ in gleicher Spulenhöhe zum ESR-Resonator montierten passiven Schwingkreises (s. Abb. 5b) mit dem Eingang CH 1 des Oszilloskops. Stellen Sie dann den passiven Schwingkreis so neben den aktiven, dass sich die Spulen koaxial in möglichst geringem Abstand (1- 2 mm) gegenüberstehen.

Die Amplitude des ESR-Oszillators ist auf den maximalen Wert, der Kondensator  $C_2$  des passiven Schwingkreises zunächst auf den ersten Skalenstrich (1/6), der Kanal 1 des Oszilloskops auf AC cal. 0,1 V/DIV (= 0,1 V/cm), dessen y-Position symmetrisch um Null, die Zeitablenkung auf 0,1  $\mu$ s/DIV einzustellen.

Stellen Sie danach die Frequenz  $\nu$  am Oszillator auf ca. 28 MHz ein und bestimmen Sie den Effektivwert  $I_{1,eff}(\nu)$  vom  $\mu$ A-Meter sowie den vom Oszilloskop abgelesenen Spitzenwert  $U_{2s}(\nu)$ .

Erhöhen Sie die Frequenz stufenweise um ca. 2 MHz bis ca. 44 MHz und bestimmen Sie jeweils  $I_{1,eff}(\nu)$  und  $U_{2s}(\nu)$ . Stellen Sie dazu die Verstärkung des Kanals 1 des Oszilloskops (symmetrische Einstellung der y-Position beachten) so ein, dass die Ablesung des Wertes  $U_{2s}$  möglichst präzise ist. Um das Minimum von  $I_1$  bzw. Maximum von  $U_2$  im Bereich der Resonanz genauer zu bestimmen, sind die Frequenzintervalle dort entsprechend kleiner zu wählen.

Führen Sie die Messreihe mit der Einstellung des Kondensators  $C_2$  auf dem 2. Skalenstrich (2/6) entsprechend durch.

Bestimmen Sie abschließend nach Entfernen des passiven Schwingkreises den Strom  $I_{1,eff}(\nu)$  für einige Frequenzen.

Bestimmen Sie für die Messreihen die Effektivwerte  $U_{1,eff}$  der Spannung  $U_1$  ( $U_1 = 56k\Omega \times I_{1,eff}$ ) und tragen Sie diese mit den ermittelten Spannungen  $U_{2s}$  über der Frequenz  $\nu$  auf. Beschreiben Sie das Messergebnis.

### zu Aufgabe 2 und 3

Stellen Sie den Oszillator mit der Probe so zwischen die Helmholtzspulen, dass die HF-Spule mittig im B-Feld liegt. Schließen Sie die Geräte gem. Abb. 6 an. Das  $\mu\text{A}$ -Meter ( $I_1$ ) am Oszillator wird nicht benötigt. Achten Sie darauf, dass die Helmholtz-Spulen richtig gepolt an das Betriebsgerät angeschlossen werden (A, A an die Stromquelle anschließen, Z, Z miteinander verbinden). Die Signalausgänge  $U_B$  bzw.  $U_S$  des Betriebsgerätes B-Feld bzw. ESR-Signal werden über Koaxialkabel mit den Eingängen CH 1 bzw. CH 2 des Zweistrahl-Oszilloskops verbunden. Über koaxiale T-Stücke am Betriebsgerät werden diese Ausgänge parallel über Koaxial-Kabel mit Bananen-Steckern an die Signaleingänge  $U_{A1}$  bzw.  $U_{B1}$  zur Registrierung und Auswertung am PC angeschlossen.

Die Eingänge CH 1 bzw. 2 des Oszilloskops sind durch Knopfdruck jeweils auf AC und durch den Drehschalter auf die Verstärkung 1V/DIV cal. (roter Knopf am rechten Anschlag) bzw. 0,5V/DIV cal. voreinzustellen. Rechts unten ist am Oszilloskop die Anzeige x-y zu drücken. Hierdurch wird die Spannung am Kanal 1 ( $U_B$ ) auf der x-Achse, die ESR-Signalspannung ( $U_S$ ) auf der y-Achse angezeigt. Durch Regelung der x-Position wird der Elektronenstrahl mittig auf der x-Achse, durch Regelung der y-Position sowie gegebenenfalls der Eingangsverstärkung des Kanals 2 optimal auf der y-Achse eingestellt.

Stellen Sie am Betriebsgerät das Gleichfeld auf eine Stromstärke von ca. 0,5 A, die Wechselfeldstromstärke auf ca. 0,3  $A_{\text{eff}}$  ein, am eingeschalteten Oszillator (Regelung auf max.) eine Frequenz von ca. 40 MHz ein.

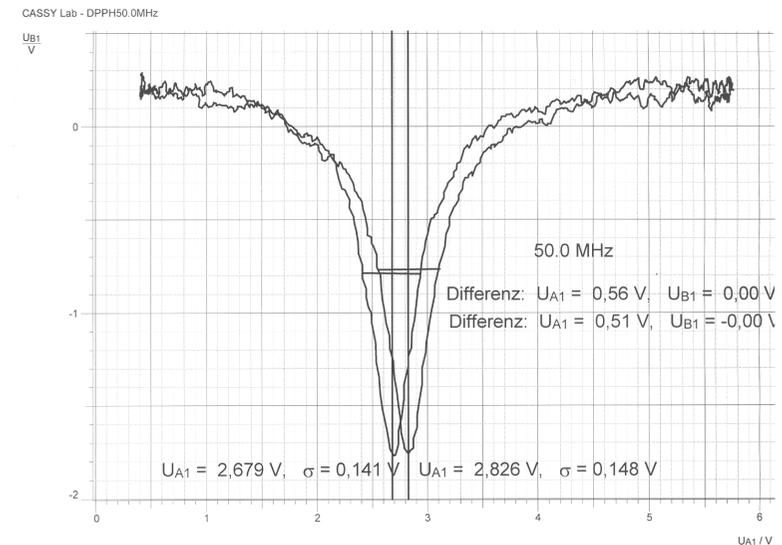
Es sollten sich eine bzw. zwei Resonanzkurven etwa gem. Abb. 3 zeigen. Durch Verändern der Phaseneinstellung am Betriebsgerät können die zwei Kurven bezüglich der Lage ihrer Minima auf der x-Achse zur Deckung gebracht werden.

Eine solche auf dem Oszilloskop optimiert dargestellte Resonanzkurve ist in Abhängigkeit von der am Oszillator jeweils eingestellten und am Betriebsgerät angezeigten Frequenz  $\nu_0$  hinsichtlich der Lage ihres Minimums ( $B_0$ ) sowie der Breite  $\delta B_0$  beim halben Wert zwischen dem Untergrundwert und dem Minimalwert der Resonanzkurve zu bestimmen.

Die Aufnahme und Auswertung der Resonanzkurven wird am PC mit dem Programm *CASSY Lab* vorgenommen. Dieses Programm wird bereits in den Versuchen A5, *Pohlsches Drehpendel* bzw. A6, *Schallgeschwindigkeit in Gasen und Festkörpern* benutzt. Es wird daher im Wesentlichen als bekannt vorausgesetzt.

Starten Sie das Programm *Cassy Lab*. Es erscheint die Menüfläche. Öffnen Sie nach Schließen des Einstellungsfensters mit dem 2. Button in der Kopfzeile im

Ordner *Eigene Dateien\ESR* die Datei *ESR.lab*. Nach Drücken des Stoppuhrsymbols wird wiederholt eine Resonanzkurve ähnlich wie auf dem Oszilloskop innerhalb des Messzeitintervalls von 20 ms aufgezeichnet. Gegebenenfalls kann durch Anklicken der x-, und y-Skala mit der rechten Maustaste (Min-Max) der Skalenbereich  $U_{B1}$  (ESR-Signal) und  $U_{A1}$  (Feldmodulation) optimiert werden. Durch Verstellen der Phase am Betriebsgerät sollen die Resonanzkurven auf der Feldachse nahe beieinander aber nicht ganz zur Deckung gebracht werden, um die Auswertung zu erleichtern. Abb. 7 zeigt ein Messbeispiel mit Auswertung:



**Abb. 7:** Messbeispiel zur ESR von DPPH: Messfrequenz  $\nu_0 = 50.0$  MHz, Lage der Peakschwerpunkte (vertikale Linien):  $U_{A1}$ , Halbwertsbreiten (horizontale Linien): Differenz  $U_{A1}$

Nach Auswahl einer Kurve durch Stoppen der Uhr ist die Auswertung vorzunehmen. Mit rechter Maustaste *Markierung setzen - Text* wird die Frequenz notiert. Nach Mausklick rechts *weitere Auswertungen- Peakschwerpunkt* wird mit gedrückter linker Maustaste die Maus über ein größeres Kurvenstück symmetrisch zum Peak gezogen (blaue Invertierung der Kurve). Nach Loslassen der Maustaste wird der Schwerpkt (vertikale Linie) gezeichnet. Die Position ist im Textfenster gespeichert. Sie wird wie der Text *Frequenz* zuvor notiert.

Danach ist die halbe Höhe zwischen dem Minimalwert der Kurve und dem

Hintergrundwert auszumachen und nach Mausklick rechts *Markierungen setzen - Differenz messen* auszuwählen. Dann ist mit gedrückter linker Maustaste eine horizontale Strecke entsprechend der Halbwertsbreite zu zeichnen. Die Zahlen werden wie der Text zuvor notiert.

Die Auswertungen sind für beide Kurven vorzunehmen. Anschließend sind die Mittelwerte von  $U_{A1}$  bzw.  $\Delta U_{A1}$  zu bestimmen.

Führen Sie die Messungen und Auswertungen bei Frequenzen  $\nu_0$  von ca. 27,7 MHz (Minimalfrequenz), 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70 und 74,4 MHz (Maximalfrequenz) durch. Speichern Sie die Dateien jeweils mit Name *Frequenz\_Datum* (6 Ziffern) in einem Ordner mit dem Namen *Gruppennummer* ab und drucken Sie die Diagramme für das Protokoll aus.

In der weiteren Auswertung ist die Spannung  $U_{A1}$  der Lage des Resonanzschwerpunktes bzw. der Halbwertsbreite in die jeweilige magnetische Induktion  $B_0$  bzw.  $\delta B_0$  umzurechnen. Herstellerangaben zur Betriebsgerät-Verstärkung sowie Messungen des Magnetfeldes mit einer Hallsonde ergeben:

$$B(\text{mT}) = 0,674 U_{A1}(\text{V})$$

Tragen Sie anschließend die Resonanzfrequenz  $\nu_0$  über dem Resonanzfeld  $B_0$  auf und bestimmen Sie durch eine Ausgleichsgerade die Steigung  $\Delta\nu_0/\Delta B_0$ . Schätzen Sie den Fehler des Wertes der Steigung ab. Geht die Gerade durch den Ursprung?

Bestimmen Sie Mit Gl. (13) den g-Faktor von DPPH, indem Sie nicht das Verhältnis  $\nu_0 / B_0$  selbst sondern die Steigung der Geraden benutzen, also:

$$g = \frac{h}{\mu_B} \frac{\Delta\nu_0}{\Delta B_0}$$

Schätzen Sie den Fehler des g-Faktors anhand des Fehlers bei der Bestimmung der Geradensteigung ab.

Tragen Sie die ermittelten Halbwertbreiten  $\delta B_0$  über der Resonanzfrequenz  $\nu_0$  auf Diskutieren Sie Ihr Versuchergebnis und vergleichen Sie es mit Literaturdaten von DPPH.

Literaturwerte für DPPH:

$$g = 2,0036$$
$$\delta B_0 = 0,15 - 0,81 \text{ mT} \quad (\text{abhängig vom Lösungsmittel bei der Kristallisation})$$

## 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche *Quantenzahlen* beschreiben die Zustände eines einzelnen Elektrons im Atom, welche seine *potentielle Energie* im Magnetfeld?
- 2) Wie setzt sich der *Gesamtdrehimpuls* bei Mehrelektronensystemen im Fall der LS-Kopplung zusammen? Durch welche Quantenzahlen wird er bei dieser Kopplung beschrieben?
- 4) Wie lautet die Resonanzbedingung für die ESR?
- 5) Welche Magnetfelder werden bei kommerziellen ESR-Spektrometern, welche im vorliegenden Versuch benutzt? Welche Resonanzfrequenzen treten entsprechend auf?
- 6) Welche Substanz wird im vorliegenden ESR-Versuch untersucht? Weshalb besitzt sie ein paramagnetisches Moment?
- 7) Welche Größe wird aus dem Verhältnis Resonanzfrequenz zu Resonanzfeld bestimmt? Welche physikalische Information lässt sich daraus gewinnen?
- 8) Warum hat eine ESR-Resonanzkurve eine endliche Halbwertsbreite? Welche Information kann aus der Breite gewonnen werden?
- 9) Welche Substanzen sind für die Messung der Elektronenspinresonanz geeignet?

## Versuch D 18: Kernspinresonanz

**1. Literatur:** Gerthsen/Kneser/Vogel, Physik  
Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik,  
Bd. IV,1: Aufbau der Materie  
Kittel, Einführung in die Festkörperphysik  
Schatz/Weidinger, Nukleare Festkörperphysik

**Stichworte:** Magnetisches Kerndipolmoment, Kernmagnetisierung, Kern-Zeeman-Aufspaltung; magnetische Kernresonanz (NMR); Anwendungen der NMR, Wechselwirkungen magnetischer Kernmomente mit ihrer Umgebung

### 2. Grundlagen

#### 2.1 Einleitung

Etwa zur gleichen Zeit der Entdeckung der Elektronenspinresonanz (ESR) durch E.K. Zavoisky (1945) haben E.F. Purcell und F. Bloch mit Mitarbeitern die ersten Spinresonanzexperimente an Atomkernen in Flüssigkeiten und Festkörpern durchgeführt. Die Methode der Nuklearen Magnetischen Resonanz (NMR) hat sich ähnlich erfolgreich wie die der ESR (s. Versuch D17: *Elektronenspinresonanz*) zu einer wichtigen Methode zur Untersuchung von komplexen Molekülstrukturen, von chemischen Bindungen und Bewegungen von Atomkernen (Diffusion) sowie anderen Problemstellungen in Physik, Chemie und Medizin entwickelt.

Zu erwähnen sind insbesondere die in neuerer Zeit für die Medizin entwickelten Verfahren der orts aufgelösten NMR an Protonen, welche es erlauben, in situ von innerem, lebenden Zellgewebe sog. *NMR-Tomogramme* zu erstellen. Dabei werden Schnittbilder mit auf der NMR beruhenden Kontrastparametern erzeugt, ohne das Gewebe zu schädigen.

Das Verfahren der NMR beruht auf der Absorption hochfrequenter elektromagnetischer Strahlung durch paramagnetische Atomkerne in einem äußeren Magnetfeld, in welchem die Kernspinzustände energetisch aufspalten. Dabei finden Übergänge zwischen den Spinzuständen statt, wenn ihre Energiedifferenz  $\Delta E$  der Photonenenergie  $h\nu$  der hochfrequenten Strahlung entspricht.

Die NMR ist an Atomkernen möglich, welche einen von Null verschiedenen Kernspin  $I$  und ein entsprechendes magnetisches Moment  $\underline{\mu}_I$  besitzen. Während

bei der ESR nur Elemente bzw. Systeme mit ungepaarten Elektronen in Frage kommen, gibt es für fast jedes Nuklid NMR-fähige stabile Isotope. Dies macht die NMR zu einer vielseitig einsetzbaren Methode.

#### 2.2 Kernspin und magnetisches Kernmoment

Die *Spinquantenzahl*  $I$  ( $I = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ ) beschreibt den Spin oder - in formaler Analogie zum Bahndrehimpuls - den *Eigendrehimpuls*  $I$  des Atomkerns vom Betrag

$$|I| = \sqrt{I(I + 1)} \hbar \quad (1)$$

Die z-Komponente  $I_z$  des Kernspins bezüglich einer z.B. durch ein äußeres Magnetfeld vorgegebenen Richtung ist durch die *magnetische Spinquantenzahl*  $M$  festgelegt:

$$I_z = M \hbar, \quad M = I, I - 1, I - 2, \dots, -I \quad (2)$$

Mit dem Spin des Atomkerns ist ein entsprechendes magnetisches Dipolmoment  $\underline{\mu}_I$  verknüpft:

$$\underline{\mu}_I = \gamma_I I = \frac{g \mu_N}{\hbar} I, \quad \mu_{Iz} = \gamma_I I_z = g \mu_N M \quad (3)$$

Unter dem magnetischen Moment  $\mu$  eines Atomkerns mit Spin  $I$  versteht man das maximale Moment  $\mu_{Iz}$ , also:

$$\mu = g \mu_N I \quad (4)$$

Das Verhältnis  $\gamma_I = g \mu_N / \hbar$  nennt man *gyromagnetisches Verhältnis* des Kerns,  $g$  ist der sog. nukleare *g-Faktor*,  $\mu_N = e \hbar / 2 m_p = 5,05 \times 10^{-27} \text{ A m}^2$  ist das *Kernmagneton*, die Einheit für das nukleare magnetische Moment,  $m_p$  die Protonenmasse. (Vergl.  $\mu_N$  mit der atomaren Einheit  $\mu_B$ , *Bohrsches Magneton*).

#### 2.3 Addition von nuklearen Drehimpulsen

Betrachtet man die Nukleonen Proton und Neutron als klassische Partikel mit Bahndrehimpuls  $L$ , erwartet man - bezogen auf das jeweilige magnetische Moment

- für das elektr. geladene Proton den g-Faktor  $g_L = 1$  und für das elektr. neutrale Neutron  $g_L = 0$ . Betrachtet man Proton und Neutron als reine Dirac-Teilchen (wie z.B. das Elektron), so würde man für das Proton mit Spin  $S$  den g-Faktor  $g_S = 2$  und für das Neutron  $g_S = 0$  erwarten. Der experimentelle g-Faktor eines freien Protons ist jedoch:  $g_S = 5,59$ ; der eines freien Neutrons:  $g_S = -3,83$ .

Diese starke Abweichung von Theorie und Experiment deutet darauf hin, dass beide Nukleonen nicht elementare sondern zusammengesetzte Teilchen sind. In der Quark-Theorie sind Proton und Neutron aus je drei Quarks zusammengesetzt.

Für Mehrelektronensysteme, wie z.B. nichtabgeschlossene Elektronenschalen der Atomhülle bestimmter Elemente des Periodensystems sind Modelle entwickelt worden, den elektronischen g-Faktor zu berechnen (Landé-Formel, vergl. Versuch D17). Mithilfe einer verallgemeinerten Landé-Formel können analog im Quark-Modell die g-Faktoren der Nuklide angenähert richtig berechnet werden.

In der nachfolgenden Tabelle sind die experimentellen Daten einiger NMR-Nuklide aufgeführt.

Nuklid	natürliche Häufigkeit (%)	Kernspin I	$\mu$ ( $\mu_N$ )	NMR-Frequenz (MHz/Tesla)
$^1\text{H}$	99,985	1/2	2,793	42,576
$^2\text{H}$	0,0148	1	0,857	6,532
$^7\text{Li}$	92,5	3/2	3,256	16,545
$^{13}\text{C}$	1,11	1/2	0,702	10,701
$^{19}\text{F}$	100	1/2	2,692	40,076
$^{27}\text{Al}$	100	5/2	3,642	11,104
$^{31}\text{P}$	100	1/2	1,132	17,256
$^{35}\text{Cl}$	75,77	3/2	0,822	4,177
$^{63}\text{Cu}$	69,2	3/2	2,223	11,296
$^{105}\text{Pd}$	22,2	5/2	-0,642	1,957

**Tabelle 1:** Experimentelle Daten einiger NMR-Nuklide

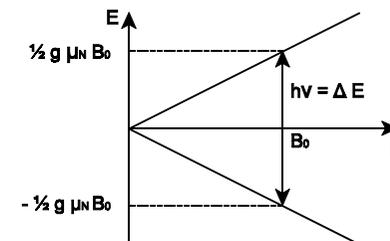
## 2.4 Energie der Atomkerne im Magnetfeld, magnetische Dipolübergänge

Ein magnetischer Dipol  $\underline{\mu}$  hat in einem Magnetfeld  $\underline{B}$  die potentielle Energie  $E = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}$ . Die potentielle Energie  $E_M$  eines Atomkerns mit magnetischem Moment  $\underline{\mu}$  ist mit Gl. (3) damit:

$$E_M = -g M \mu_N B \quad (5)$$

Die Energie  $E_M$  hat also - entsprechend den Einstellmöglichkeiten des magnetischen Moments im B-Feld -  $2I + 1$  diskrete, durch  $M$  festgelegte Werte, die sich jeweils um  $\Delta E = g \mu_N B$  unterscheiden. Im Feld  $B = 0$  sind alle Energiezustände  $E_M$  entartet, im endlichen Feld  $B$  sind sie proportional zu  $B$  aufgespalten. Man spricht auch von einer *Kern-Zeeman-Aufspaltung* der Energieniveaus (s. Versuch D15: *Zeeman-Effekt*).

Anders jedoch als beim Zeeman-Effekt, bei dem energetische Übergänge atomarer elektrischer Dipole unter Emission elektrischer Dipolstrahlung in einem äußeren Magnetfeld betrachtet werden, sind hier (wie bei der ESR) die energetischen Übergänge magnetischer Dipolmomente unter Absorption magnetischer Dipolstrahlung Gegenstand der Untersuchungen. Laut der (quantenmechanischen) Auswahlregel für die beim Übergang absorbierte bzw. emittierte magnetische Dipolstrahlung sind nur Übergänge zwischen jeweils energetisch benachbarten Kern-Zeeman-Niveaus erlaubt, also zwischen solchen, bei denen  $\Delta M = \pm 1$  ist.



**Abb. 1:** Zeeman-Aufspaltung der Energie eines Atomkerns mit Spin  $I = 1/2$  und magnetischem Spinmoment  $\mu = g \mu_N I$  im Magnetfeld  $B$  mit Resonanzübergang bei  $B_0$  durch Absorption der Photonenenergie  $h\nu = g\mu_N B_0$

Mit Gl. (5) folgt damit

$$\Delta E_M = g \mu_N B \quad (6)$$

Abb.1 zeigt das Energieschema der Zeeman-Aufspaltung eines Kerns mit Spin  $I = 1/2$  und magnetischem Moment  $\mu = g \mu_N I$  im Magnetfeld  $B$ . Für einen Übergang aus dem energetisch tieferen in den höheren Energiezustand ist im Feld  $B_0$  die Aufnahme der Energie  $\Delta E = g \mu_N B_0$  nötig. Diese wird durch die Absorption elektromagnetischer Strahlung der Frequenz  $\nu$  bzw. Photonenenergie  $h\nu = \Delta E$  ermöglicht. Es gilt also die Resonanzbedingung

$$h\nu = \Delta E_M = g \mu_N B \quad (7)$$

## 2.5 Resonanzabsorption, Kernspinresonanz

Um qualitativ die Resonanzabsorption sowie die experimentelle Anordnung des vorliegenden Experiments (s.u.) zu veranschaulichen, wird das Modell eines klassischen Magnetkreisels mit Drehimpuls und gekoppeltem magnetischem Moment betrachtet.

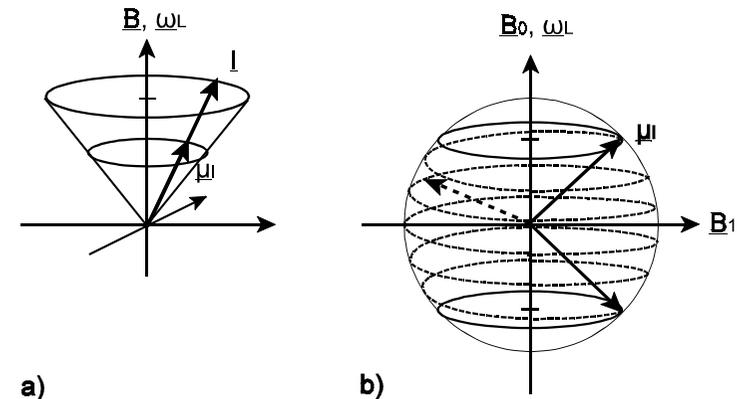
Abb. 2a illustriert die *Larmor-Präzession* eines klassischen Magnetkreisels im  $B$ -Feld. Fasst man den Kernspin  $\underline{I}$  und das parallel zu  $\underline{I}$  liegende Moment  $\underline{\mu}_I = \gamma \underline{I}$  als solchen Magnetkreisel auf, so erfahren  $\underline{\mu}_I$  und  $\underline{I}$  infolge  $\underline{B}$  ein Drehmoment  $\underline{M}$ , demzufolge sich die Richtung von  $\underline{I}$  und  $\underline{\mu}_I$  durch ihre Präzession um  $\underline{B}$  mit der *Larmor-Kreisfrequenz*  $\omega_L$  ändert.

$$\underline{M} = \underline{\mu}_I \times \underline{B} = \frac{d\underline{I}}{dt} = \underline{\omega}_L \times \underline{I}, \quad \omega_L = |\gamma_I| B = \frac{g \mu_N}{\hbar} B \quad (8)$$

Für die Larmor-Frequenz  $\nu_L = \omega_L / 2\pi$  des freien Protonenspins ergibt sich:

$$\nu_L / B \approx 42,6 \text{ MHz / T.}$$

Besteht, wie in Abb. 2b angedeutet, neben dem in z-Richtung weisenden statischen Feld  $B_0$  ein in x-Richtung weisendes hochfrequentes Magnetfeld  $B_1$  der Kreisfrequenz  $\omega_L$ , also



**Abb.2:** a) Larmor-Präzession von Spin  $\underline{I}$  und Moment  $\underline{\mu}_I$  mit der Kreisfrequenz  $\omega_L$  um die Feldrichtung  $B$ ; b) Resonanzübergang des Moments  $\underline{\mu}_I$  im Gleichfeld  $B_0$  und Hochfrequenzfeld  $B_1$

$$B_1 = B_{10} \sin(\omega_L t + \alpha), \quad (9)$$

so wirkt (bei geeignetem Phasenwinkel  $\alpha$ ) ein weiteres Drehmoment  $M_1$  senkrecht zu  $M$ , welches den Winkel zwischen  $B_0$  und  $\underline{\mu}_I$  ändert. Die Spitze des Vektors  $\underline{\mu}_I$  bewegt sich, wie in Abb. 2b angedeutet, auf einer Kugeloberfläche längs einer Spirale. Unter Energieaufnahme aus dem hochfrequenten Magnetfeld  $B_1$  erhöht sich die potentielle (Einstell-) Energie des Moments  $\underline{\mu}_I$  im Magnetfeld  $B_0$  stetig. Aufgrund der Quantennatur des Kernspins, d.h. der Richtungsquantelung von  $\underline{I}$  und  $\underline{\mu}_I$  ist der Übergang jedoch nicht wie im klassischen Bild stetig, sondern erfolgt diskontinuierlich, abrupt.

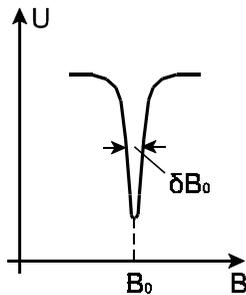
Wären in einer makroskopischen Probe mit vielen Spins die in Abb.1 skizzierten Energieniveaus mit gleicher Anzahl von Protonen besetzt, würde ein hochfrequentes Magnetfeld geeigneter Frequenz keine Resonanzabsorption bewirken, da aufgrund der verschiedenen Phasenwinkel zum HF-Feld gleich viele Protonen Energie an das HF-Feld abgeben wie von ihm aufnehmen.

Da sich die Probe jedoch im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung der Protonen bei endlicher Temperatur  $T$  befindet, besteht ein von eins verschiedenes Verhältnis der Besetzungszahlen  $N_1$  zu  $N_2$  von angeregtem Zustand zum Grundzustand entsprechend dem Energieunterschied  $\Delta E$  dieser Zustände:

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \quad (10)$$

Hierbei ist  $k_B$  die Boltzmann-Konstante. Bei Raumtemperatur und einem B-Feld von ca. 0,5 T, wie es im vorliegenden Versuch verwendet wird, ist  $\Delta E/k_B T \approx 3,4 \times 10^{-6}$ .  $N_1/N_2$  ist nahezu 1, daher  $\Delta N/N \approx 3,4 \times 10^{-6}$ . Gleichwohl reicht dieser geringe Besetzungsunterschied aus, um die Energieabsorption aus dem HF-Feld nachzuweisen.

Misst man die aus dem HF-Feld absorbierte Energie bei fester Frequenz  $\nu_0$  als Funktion des Magnetfeldes B, so zeigt, wie in Abb. 3 skizziert, die Signalspannung U (s. Versuchsschaltung unten) beim Resonanzfeld  $B_0$  keine beliebige scharfe Absorptionlinie sondern eine *Absorptionskurve* (Lorentz-Kurve, s. u.a. Versuch C3: *Analyse akustischer und elektrischer Schwingungen*) mit einer bestimmten *Halbwertsbreite*  $\delta B_0$ .



**Abb. 3:**  
Absorptionskurve der Signalspannung U(B) beim Feld  $B_0$  mit Halbwertsbreite  $\delta B_0$

Diese Halbwertsbreite  $\delta B_0$  ist im einfachsten Fall für ein homogenes Magnetfeld Ausdruck der Energieunschärfe  $\delta E$  des angeregten Zustandes. Aufgrund der *Heisenbergschen Unschärferelation*

$$\delta E \tau \geq \frac{\hbar}{2} \quad (11)$$

ist mit der *Lebensdauer*  $\tau$  des angeregten Zustandes auch die Energiedifferenz  $\Delta E$  zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand über Gl. (11) mit der Unschärfe

$$\delta E = g \mu_N \delta B_0 \quad (12)$$

behaftet. Damit ist

$$\delta B_0 = \frac{\hbar}{2 g \mu_N \tau} \quad (13)$$

für diesen Fall unabhängig von der Resonanzfrequenz  $\nu_0$ .

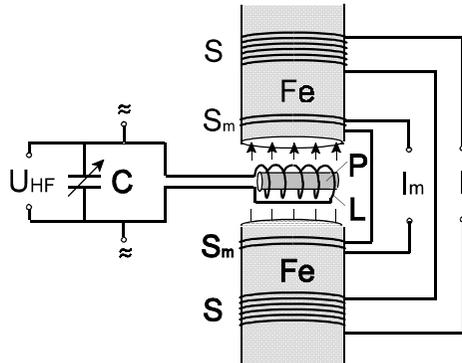
Messungen der NMR an einer Probe ermöglichen es, bei vorgegebener Frequenz  $\nu_0$  einerseits die Lage ( $B_0$ ) und andererseits die Breite ( $\delta B_0$ ) der Resonanzkurve zu bestimmen. Aus der Lage kann mit Gl. (7) der g-Faktor bestimmt werden. Messergebnisse ergeben, dass der Wert des g-Faktors oft nicht genau dem des betrachteten freien Kernspins entspricht, sondern geringfügig verschoben ist. Diese Verschiebung hat ihre Ursache in der paramagnetischen Verstärkung bzw. diamagnetischen Abschwächung des angelegten Magnetfeldes am Kernort infolge der den Kern umgebenden Elektronen. Genaue Messungen des g-Faktors erlauben daher Rückschlüsse auf die Umgebung eines Atomkerns z. B. in einem Festkörper.

Aus der Linienbreite der Resonanz können andererseits Aussagen über dynamische Eigenschaften gewonnen werden. Wird eine NMR-Probe einem äußeren Magnetfeld ausgesetzt, bedarf es einer gewissen Zeit, bis sich die magnetischen Kernmomente entsprechend ausgerichtet haben bzw. die Besetzungszahlen  $N_1$  und  $N_2$  dem thermischen Gleichgewicht entsprechen. Dieses Gleichgewicht stellt sich durch (strahlungslosen) Energieaustausch mit der Umgebung der Kerne ein. Auch im Falle der Resonanz bewirkt dieser Energieaustausch eine (stetig) geringe Differenz der Besetzungszahlen  $N_i$ .

Die Linienbreite der Resonanz wird durch verschiedene *Relaxationsprozesse* bestimmt, die der Ausrichtung der magnetischen Momente entgegenwirken. Als *Spin-Spin-Relaxation* bezeichnet man die Wechselwirkung der magnetischen Kernmomente untereinander, als *Spin-Gitter-Relaxation* die Wechselwirkung der Kernmomente mit fluktuierenden magnetischen Feldern z.B. aufgrund der Gitterschwingungen in Festkörpern oder thermischen Bewegungen von Atomen in Flüssigkeiten. Aus der Messung der NMR-Linienbreiten bzw. der Relaxationszeiten erhält man also Information über mikroskopische Eigenschaften der untersuchten Probe.

Bei der Durchführung von NMR-Experimenten sind prinzipiell zwei verschiedene Anordnungen zu unterscheiden: a) die stationäre Methode, bei der ständig ein Hochfrequenzfeld geringer Stärke ( $B \approx 10^{-7}$  T) einwirkt, b) die gepulste Kernresonanz, bei der zunächst durch einen starken ( $B \approx 10^{-3}$  T) Puls die Magnetisierung aus der z-Richtung herausgedreht wird. Nach Abschalten der

Hochfrequenz wird die freie Präzession und Relaxation in einer speziellen Empfängerspule beobachtet.



**Abb. 4:** Prinzipschaltbild (vereinfacht) zum Nachweis der NMR: Details siehe Text

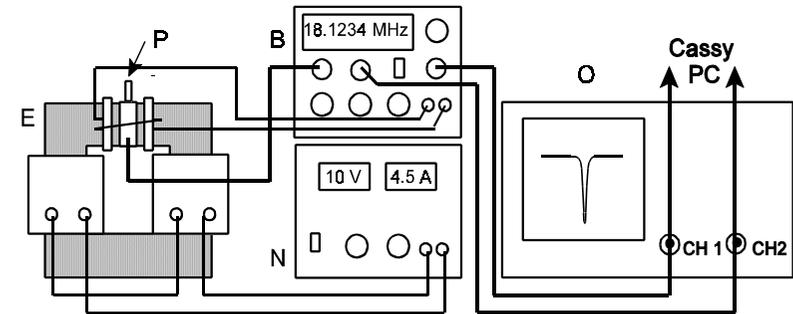
Im vorliegenden Versuch wird die stationäre Methode benutzt. Die Messanordnung skizziert Abb. 4 schematisch. Die zylindrische Probe P wird transversal zur Probenachse einem statischen Magnetfeld (0,1 - 0,5 T) sowie einem überlagertem niedrigfrequenten magnetischen Wechselfeld ausgesetzt. Die Felder werden im Spalt eines Eisenkerns erzeugt, den zwei Spulen S mit konstantem Spulenstrom I sowie zwei Modulationsspulen  $S_m$  mit einem Wechselstrom  $I_m$  variabler Amplitude und Frequenz erregen (ca. 30 Hz fast sweep oder ca. 0,5 Hz slow sweep). Das Magnetfeld B am Ort der Probe setzt sich also aus einem Gleichfeld und einem mit ca. 30 Hz oder ca. 0,5 Hz modulierten Wechselfeld variabler Stärke zusammen.

Ein Schwingkreis L - C hoher Güte (s. z.B. Versuch C8/9: *Wechselstromwiderstände und Reihenresonanz*), in dessen Spule L sich die Probe befindet, wird durch Verändern der Kapazität C des Kondensators bei variabler Frequenz  $\nu$  betrieben. Bei geeignet eingestelltem Strom  $I + I_m$  bzw. geeignet eingestellter Frequenz  $\nu$  wird die Resonanzbedingung, Gl. (7), mit der doppelten Periode des Stroms  $I_m$  erfüllt. Das achsial zur Probe liegende hochfrequente Feld wird bei jedem Resonanzdurchgang infolge der Energieabsorption durch die Probe gedämpft, so dass sich die Güte des Schwingkreises und die über L bzw. C bestehende Spannung  $U_{HF}$  verringert. Diese Spannung wird gleichgerichtet und verstärkt als Funktion des Magnetfeldes (bzw. der Modulationsspannung  $U_m$ ) registriert.

### 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie für zwei verschiedene Magnetfelder  $B_0$  die NMR-Frequenz  $\nu_0$  der Protonen in einer Glycerinprobe. Bestimmen Sie die Halbwertsbreite  $\delta B_0$  der Resonanzkurven.
- 2. Aufgabe:** Bestimmen Sie analog zur 1. Aufgabe die NMR der Protonen in Wasser.
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie analog zur 1. Aufgabe die NMR von Fluor in Teflon (PTFE).

### 4. Versuchsaufbau



**Abb. 5:** NMR-Versuchsaufbau: Eisenkern E mit Spulen und Probe P, NMR-Betriebsgerät B, Gleichstrom-Netzgerät N, Oszilloskop O

Den Versuchsaufbau zeigt Abb. 5 schematisch. Links der Eisenkern E mit großen Spulen zur Erzeugung des Gleichfeldes. Den Gleichstrom hierfür liefert das Netzgerät N. Oben mittig im Eisenkern befindet sich der umkapselte Spalt mit Probe P, daneben die beiden Modulationsspulen. Eine Hallsonde (nicht gezeigt) gestattet die Messung des B-Feldes im Spalt. Die HF-Spule (nicht sichtbar) ist an das NMR-Betriebsgerät B angeschlossen, welches auch die Wechselspannung für die Modulationsspulen liefert sowie die Frequenz des variablen HF-Oszillators anzeigt. Zwei Signalausgänge liefern die gleichgerichtete und verstärkte HF-Spannung *NMR-Signal* sowie eine zur Modulation des Magnetfeldes proportionale Spannung  *$\Delta B$ -Signal*. Die Ausgänge sind zur Aufzeichnung an ein Oszilloskop O

(Eingänge Ch 2 und 1) und über das Interface Cassy an einen PC angeschlossen.. Das NMR-Betriebsgerät erlaubt neben der Variation der HF-Frequenz die Einstellung der HF-Amplitude, der Modulationsamplitude sowie der Phasendifferenz zwischen den Signalspannungen. Ein Schalter gestattet zudem die Umschaltung der Modulationsfrequenz (fast-slow).

## 5. Versuchsdurchführung

### zu Aufgabe 1

Stellen Sie sicher, dass die Geräte gem. Abb.5 zusammengeschaltet sind. Achten Sie darauf, dass insbesondere die Spulen richtig gepolt mit dem Netz- und Betriebsgerät verbunden sind, so dass sie den Kern im gleichen Sinn erregen. Schalten sie alle elektrischen Geräte (einschl. Hallsonde) ein. Die Geräte sollten mindestens eine viertel Stunde vor der ersten Messwertaufnahme zur Stabilisierung warmlaufen.

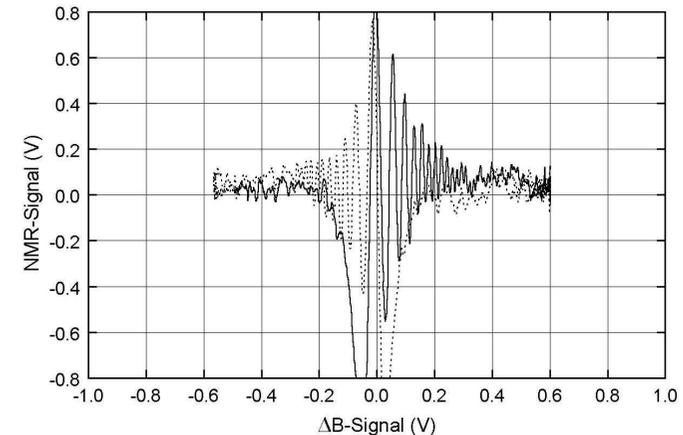
Zur Aufnahme der NMR-Spektren sind zunächst folgende Einstellungen vorzunehmen:

NMR-Betriebsgerät: Die HF-Amplitude ist möglichst klein aber so groß zu wählen, dass die Frequenz angezeigt wird; die HF-Frequenz auf ca. 18 MHz; Sweep auf *fast*, die Modulation auf den Minimalwert einzustellen.

Oszilloskop:  $\Delta B$ -Signal, Kanal 1 (CH1) DC: Empfindlichkeit 0,2 V/DIV (= 0,2V/cm) cal. (roter Drehknopf am rechten Anschlag); NMR-Signal, Kanal 2 (Ch2) DC: Empfindlichkeit 0,2 - 0,5 V/DIV cal.; X-Y-Darstellung.

Netzgerät: Spannung auf ca. 12 V (so hoch, dass stets die Stromeinstellung regelt), Strom auf zunächst ca. 3,90 A. Achten Sie beim Einstellen des Stroms darauf, dass der angestrebte Wert stets von kleineren Werten kommend erreicht wird. Infolge der Hysterese der B(I)-Kurve (vergl. Versuch C 6: *Magnetische Hysterese*) ist, um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten, zur erneuten Einstellung eines Stromwertes stets vom Stromwert Null auszugehen.

Führen Sie die Glycerinprobe (zugeschmolzenes Glasröhrchen) in die vorgesehene Öffnung im Magnetspalt ein. **Dies sollte behutsam geschehen, um die HF-Spule nicht zu beschädigen.** Suchen Sie durch Variation der HF-Frequenz auf dem Bildschirm des Oszilloskops die Resonanz. Gegebenenfalls ist mit der Änderung der HF-Frequenz gleichzeitig die HF-Amplitude zu variieren, da diese auch von der Frequenz abhängt. Die Resonanz wird durch einen Kurvenverlauf des NMR-Signals über dem  $\Delta B$ -Signal, ähnlich wie dem in Abb. 6 wiedergegebenen, angezeigt.



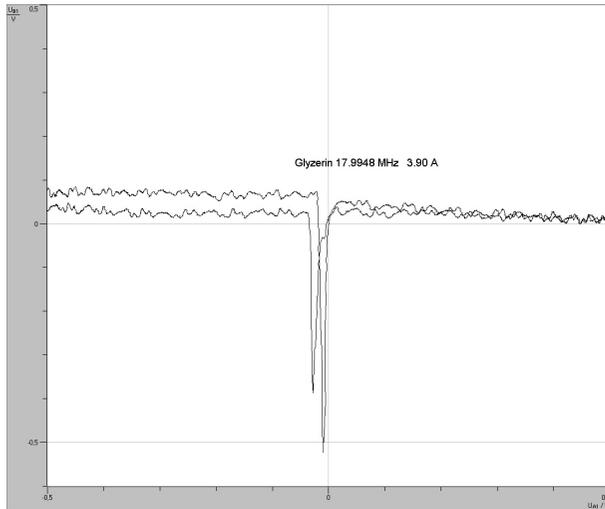
**Abb. 6:** NMR- Signal von Protonen in Glycerin im fast sweep-Modus: durchgezogene Kurve: bei sinusförmig ansteigender Modulationsspannung; gestrichelte Kurve: bei entsprechend abfallender Modulationsspannung

Wie Abb.6 zeigt, erreicht das NMR-Signal mit ansteigendem B-Feld ( $\Delta B$ -Signal) hier bei ca. -0,03 V ein Resonanzminimum (in Abb. 6 außerhalb des Signal-Bereichs), um bei steigendem Feld zunächst stark, dann abnehmend zu oszillieren und schließlich den Signalwert nahe 0 V außerhalb der Resonanz anzunehmen. Die in Abb. 6 gestrichelt gezeichnete Kurve zeigt die (nahezu spiegelsymmetrische) Signalspannung bei entsprechend abnehmender Modulationsspannung (B-Feld).

Die Oszillation des NMR-Signals hat ihre Ursache in der zur Feld-Sweep-Rate vergleichsweise langsamen Relaxation der Kernspins. Dem ansteigenden B-Feld und der damit ansteigenden Larmor-Frequenz  $\nu$ , s. Gl. (8), überlagert sich das Induktionssignal der mit der Resonanzfrequenz  $\nu_0$  angeregten frei präzedierenden Kernspins. Diese be- bzw. entdämpfen das HF-Feld der Frequenz  $\nu$  entsprechend ihrer Phasenlage zum Feld. Man beobachtet mit steigender Modulationsspannung ein oszillierendes NMR-Interferenzsignal der Differenzfrequenz  $\nu - \nu_0$  und einer Amplitude, die abhängig von der Modulationsfrequenz und -amplitude sowie der Lebensdauer der angeregten Kernspins abnimmt.

Bringen Sie durch Verändern der Phaseneinstellung am NMR-Betriebsgerät die beiden Minima der NMR-Signale auf dem Oszilloskop zur Deckung und diese

durch Verändern der HF-Frequenz möglichst genau in zentrische Lage ( $\Delta B$ -Signal = 0). Schalten Sie danach den Sweep-Schalter auf die Position *slow* um.. Auf dem Oszilloskop sollte nun für die Glycerinprobe der Elektronenstrahl etwa in der Mitte des Bildschirms ein relativ scharfes Resonanzminimum aufzeichnen. Diese Signalkurve ist mit dem über das Cassy-Interface angeschlossenen PC aufzuzeichnen und nachfolgend auszuwerten.



**Abb. 7:**  
CassyLab-Messbeispiel: NMR-Kurve der Glycerinprobe

Abb. 7 zeigt ein Messbeispiel zur NMR an der Glycerinprobe. Zur Aufzeichnung ist im PC, Ordner *Praktikum*, das Programm *CassyLab* zu laden. Dieses allgemeine Mess- und Auswertungs-Programm wird bereits im Praktikum bei den Versuchen *Pohlsches Drehpendel* und *Schallgeschwindigkeit* eingesetzt und wird daher hier als im wesentlich bekannt vorausgesetzt.

Laden Sie aus dem Ordner *Eigene Dateien\NMR* die Datei *NMR.lab*.  
Nach Drücken des *Werkzeug-Symbols* werden die Messeinstellungen angezeigt:  
Nach Drücken auf *Cassy:U<sub>AI</sub>* ( $\Delta B$ -Signal) der Messbereich  $\pm 1$  V  
*Cassy:U<sub>BI</sub>* (NMR-Signal) der Messbereich  $\pm 1$  oder  $\pm 3$  V  
Messparameter: Intervall  $200 \mu s \times 8000 = 1600$  ms Messzeit;  
automatische Aufnahme, wiederholende Messung.

Nach Drücken des Stoppuhr-Symbols startet die wiederholende Aufzeichnung des Messsignals. Durch erneutes Drücken des Stoppuhr-Symbols kann die Messung

angehalten und die letzte Messreihe gegebenenfalls gespeichert werden. Wählen Sie eine optimale Messreihe, d.h. eine mit zwei möglichst scharfen Resonanzminima zur Speicherung aus. Er kann vorkommen, dass nicht nur jeweils ein scharfes Minimum erscheint sondern zugleich mehrere verschiedener Größe nebeneinander bzw. ein sehr breites Minimum. Dies hat wahrscheinlich seine Ursache in nicht kontrollierbaren Regel-Schwankungen  $\Delta I$  des Magnet-Gleichstroms (der Größenordnung  $\Delta I/I \approx 10^{-4}$ ). Es sei hier bemerkt, dass umgekehrt die Protonenresonanz zur genauen absoluten Messung eines Magnetfeldes (z.B. bei der ESR) Anwendung findet.

Ist eine optimale Messreihe ausgewählt, werden die Skalierungen optimiert,  $U_{AI}$  ( $\Delta B$ -Signal) auf  $\pm 0,5$  V. Dann wird der Graph mit der rechten Maustaste *Markierung setzen: Text* mit dem Label *Probe, Frequenz, Magnetstrom* versehen und die Messreihe unter geeignetem Namen in einem Unterordner von *NMR* mit Namen *Gruppennummer* abgespeichert.

Die Messung und Aufzeichnung ist bei gleichem Magnetstrom jedoch bei leicht veränderter HF-Frequenz zweimal zu wiederholen, einmal bei einer etwas geringeren Frequenz, so dass das Resonanz-Signal links von der Mitte des Bildschirms liegt, und einmal bei einer etwas höheren Frequenz mit entsprechend nach rechts verschobener Lage der Resonanz. Auf diese Weise kann in der Auswertung der (lineare) Zusammenhang zwischen dem  $\Delta B$ -Modulationssignal (x-Achse) und der Feldänderung  $\Delta B$  ermittelt werden.

Anschließend ist das DC-Magnetfeld am Ort der Probe mit der Hallsonde zu bestimmen. Lesen Sie zunächst für die vom Magneten entfernt aufgestellte Sonde die vom mV-Meter (200mV-Bereich DC) angezeigte Offsetspannung  $U_0$  ab. Entfernen Sie dann die Probe aus dem Spalt und schieben Sie die Sonde **senkrecht** von oben **vorsichtig** bis zum Anschlag der Sondenhülle in die Öffnung. Drehen Sie gegebenenfalls die (Transversal-)Sonde geringfügig so, dass sie mit der breiten Seite der Hülle quer zum Magnetfeld steht Die vom mV-Meter abgelesene Spannung  $U$  ist zu notieren und nach Abzug der Offsetspannung  $U_0$  in die magnetische Induktion  $B$  umzurechnen ( $1 \text{ mV} \triangleq 100 \text{ mT}$ ).

Im Anschluss ist die NMR-Messung an Glycerin und die anschließende Feldmessung bei einem etwas größeren Magnetfeld (Spulenstrom  $I$  ca. 4,10 A) analog zur vorherigen Messung durchzuführen und aufzuzeichnen.

### zu Aufgabe 2

Benutzen Sie für die Messung der Protonenresonanz in Wasser ein Glasröhrchen mit einer etwa 5 bis 10 mm hohen Wassersäule. Führen Sie die NMR-Messungen wie für Glycerin durch. Es genügt bei unveränderter minimaler Modulation des

Magnetfeldes die (dreifache) Messung bei nur einem Magnetfeld entsprechend einem Spulenstrom  $I$  von ca. 3,90 A. Führen Sie wie in Aufgabe 1 im Anschluss der NMR-Messung die Feldmessung mit der Hallsonde durch.

### zu Aufgabe 3

Stellen Sie für die Messung an der Teflonprobe den Magnetstrom auf ca. 4,00 A ein. Suchen Sie mit dem Oszilloskop die relativ schwache und breite Resonanz des Fluor  $^{19}\text{F}$ -Kerns in Teflon. Sie können sich entsprechend der in der Tabelle der Anleitung angegebenen Daten ausrechnen, bei welcher Frequenz für ein jeweils vorgegebenes Magnetfeld die Resonanz zu erwarten ist. Zeichnen Sie das Resonanzsignal nach möglichst genauer Zentrierung durch Feinabgleich der HF-Frequenz und Phasenabgleich auf dem Bildschirm sowie nach Optimierung durch die Reduktion der HF-Amplitude im Bereich der Modulationsspannung von  $\pm 0,5$  V auf und bestimmen Sie im Anschluss das B-Feld mit der Hallsonde.

### 6. Versuchsauswertung

Laden Sie zur Auswertung alle im Versuch gespeicherten Dateien nacheinander erneut ins Messprogramm. Bestimmen Sie die Lagen der Resonanzminima durch Anklicken der Messkurven mit dem Cursor, entsprechendem (up-down) Scrollen und Ablesen des in der Tabelle links vom eingerahmten Wert  $U_{B1}$  angezeigten Wertes  $U_{A1}$ . Notieren Sie die Resonanzwerte  $U_{A1}$  sowie das aus dem jeweiligen Magnetstrom ermittelte Magnetfeld  $B$  mit dem Text-Tool auf dem Graphen, speichern Sie die Dateien erneut ab und drucken Sie die Graphen für das Protokoll aus.

In der weiteren Auswertung sind für jedes eingestellte Magnetfeld  $B_0$  die NMR-Frequenzen über der Modulationsspannung  $U_{A1}$  aufzutragen. Zeichnen Sie durch die Messpunkte eine Ausgleichsgerade und bestimmen Sie die NMR-Frequenz  $\nu_0$  für die Modulationsspannung Null. Schätzen Sie aus dem Fehler der Ausgleichsgeraden den Fehler von  $\nu_0$  ab und aus der Ungenauigkeit der Feldmessung mit der Hallsonde den Fehler von  $B_0$ . Ermitteln Sie das Verhältnis  $\nu_0/B_0$  und den aus den Einzelfehlern resultierenden Gesamtfehler für die untersuchten Proben. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Literaturdaten (Tabelle) für Protonen bzw. für Fluorkerne.

Ermitteln Sie aus den Halbwertsbreiten  $\delta U_{A1}$  der Spektren über die Graphen  $\nu(U_{A1})$  jeweils  $\delta \nu$  und daraus schließlich die den Halbwertsbreiten entsprechenden Felder  $\delta B_0$ .

### 7. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie groß ist das paramagnetische Kernmoment eines freien Protons?
- 2) Warum besitzt das elektrisch neutrale Neutron ein magnetisches Moment?
- 3) Wie groß ist das Kernmagneton  $\mu_N$ , wie groß das Bohrsche Magneton  $\mu_B$ ?
- 4) Welche Einstellmöglichkeiten hat ein Kernspin  $I = 3/2$  im Magnetfeld?
- 5) Welche Werte  $E_M$  kann die potentielle Energie eines magnetischen Kernmoments im Magnetfeld  $B$  annehmen?
- 6) Wie lautet die Resonanzbedingung für die NMR?
- 7) Welche Größe wird aus dem Verhältnis Resonanzfrequenz zu Resonanzfeld bestimmt? Welche physikalische Information lässt sich daraus gewinnen?
- 8) Warum hat eine NMR-Resonanzkurve eine endliche Halbwertsbreite? Welche Information kann aus der Breite gewonnen werden?
- 9) Welche Substanzen sind für die Messung der NMR geeignet?
- 10) Wie groß ist etwa die Resonanzfrequenz der Protonen für  $B = 1$  T?