

Fehlerrechnung

1. Systematische und statistische Fehler

Jede Messung einer physikalischen Größe ist mit einem Fehler verbunden. Es ist daher notwendig bei der Angabe des Messwertes eine Fehlerabschätzung anzugeben.

Man unterscheidet systematische und zufällige, d.h. statistische Fehler. Die erste Fehlertyp hat ihre direkte Ursache im Messsystem und ist häufig daran zu erkennen, dass das Messergebnis grundsätzlich zu groß bzw. zu klein gegenüber theoretischen Werten oder Ergebnissen aus anderen Messarten ist. Um systematische Fehler zu minimieren muss das Messsystem, also die Versuchsanordnung geändert werden und/oder es müssen numerische Korrekturen des Messergebnisses angestellt werden.

Ein statistischer Fehler entsteht durch zufällige positive und negative Abweichungen beim Messen. Beispielsweise fällt bei einer Längenbestimmung die zu messende Strecke nicht mit einem Teilstrich eines Maßstabes zusammen und man muss daher Zwischenwerte schätzen. Oder aber der angezeigte (digitale oder analoge) Wert bei einer Spannungsmessung ist zeitlich nicht konstant sondern schwankt um einen mittleren Wert, so dass durch die Schätzung eines zeitlichen Mittelwertes oder durch den Zeitpunkt der Messung ein statistischer Fehler entsteht. Statistische Fehler sind durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisiert, welche angibt, wie wahrscheinlich eine gemessene Abweichung vom exakten (wahren), d.h. wahrscheinlichsten Wert (Erwartungswert) ist. Je häufiger ein Messvorgang wiederholt wird, desto genauer wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit auch der wahrscheinlichste Wert ermittelt bzw. desto geringer wird dessen statistische Messunsicherheit (s.u.).

2. Mittelwert, Standardabweichung, Messunsicherheit

Die beste Schätzung für den wahrscheinlichsten Wert einer Messgröße x aus n verschiedenen Einzelmessungen x_i erhält man durch Bildung des *arithmetischen Mittelwertes* \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Häufig wird in der Literatur bei statistischen Formeln mit Summenausdrücken eine

verkürzte Schreibweise verwendet, die die Summationsgrenzen und den Laufindex unterdrückt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x \quad (2)$$

Diese abkürzende Schreibweise wird auch im weiteren Text benutzt.

Ist der Mittelwert \bar{x} bekannt, so geben die Differenzbeträge $|x_i - \bar{x}|$ die Abweichungen der einzelnen Messergebnisse vom Mittelwert an und sagen so bereits etwas über die Genauigkeit der Messungen aus. Aus numerischen Gründen nimmt man statt der Differenzbeträge die Differenzquadrate $(x_i - \bar{x})^2$ und definiert als *Standardabweichung* s :

$$s = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x)^2}{n - 1}}, \quad n > 1 \quad (3)$$

Die Standardabweichung gibt den mittleren statistischen Fehler einer Einzelmessung an. Die (positive) Wurzel wird eingeführt, damit die Größe s die gleichen Einheiten besitzt wie die Messgröße selbst und somit mit ihr vergleichbar wird. Die Division durch $n - 1$ statt n berücksichtigt die Tatsache, dass bei nur einer Messung ($n = 1$) keine statistische Aussage gemacht werden kann, d.h. s undefiniert ist.

Die in Gleichung (3) angegebene Definitionsgleichung für die Standardabweichung wird in dieser Form im allgemeinen nicht benutzt. Alle gängigen Taschenrechner verwenden die äquivalente Gleichung

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{1}{n}(\sum x)^2}{n - 1}}, \quad n > 1 \quad (4)$$

da hier nicht die Messergebnisse einzeln gespeichert werden müssen, lediglich deren Summe bzw. Quadratsumme.

Neben der Angabe von Mittelwert und Standardabweichung ist häufig auch die Angabe der statistischen Sicherheit des Mittelwertes von Interesse, da dieser ja lediglich eine Schätzung des Messergebnisses gem. Gl. (2) darstellt, die für eine geringe Anzahl n von Einzelmessungen sehr unsicher ist. Die *statistische*

Messunsicherheit u ist ein Maß für den mittleren (statistischen) Fehler des Mittelwertes

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{1}{n}(\sum x)^2}{n(n-1)}}, \quad n > 1 \quad (5)$$

Während die Standardabweichung s als Maß für die statistische Streuung der Einzelmessungen x_i für eine große Anzahl n gegen einen bestimmten Wert > 0 strebt, wird die statistische Messunsicherheit u des Mittelwertes \bar{x} mit wachsender Anzahl n geringer und strebt für sehr große n gegen Null.

Sehr oft sind die Messwerte x_i normalverteilt, d.h. ihre relative Häufigkeit wird durch eine sog. *Normal- oder Gauß'sche Verteilung* $\varphi(x)$ beschrieben:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

Hierbei gibt das Integral

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx \quad (7)$$

an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Messwerte x_i (für eine große Anzahl der Messungen, $n \rightarrow \infty$) im Intervall (x_1, x_2) liegen. Der Verlauf der Funktion $\varphi(x)$ ist, wie Abb. 1. zeigt, symmetrisch um den wahrscheinlichsten Wert x_0 (den Erwartungswert) und hat die Form einer Glockenkurve mit der Halbwertsbreite von etwas mehr als 2σ .

Für sehr große n strebt der aus der Messreihe bestimmte Mittelwert \bar{x} gegen den Wert x_0 der Funktion $\varphi(x)$, die Standardabweichung s gegen den Wert σ . Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis x_i einer Einzelmessung im Intervall $\bar{x} \pm s$, d.h. $x_0 \pm \sigma$ liegt, beträgt mit Gl. (7) ca. 68 %, für das Intervall $x_0 \pm 2\sigma$ ca. 95 % und für $x_0 \pm 3\sigma$ schon 99,7 %. Ähnliches gilt für die statistische Messunsicherheit u des Mittelwertes: Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert x_0 im sog. (einfachen)

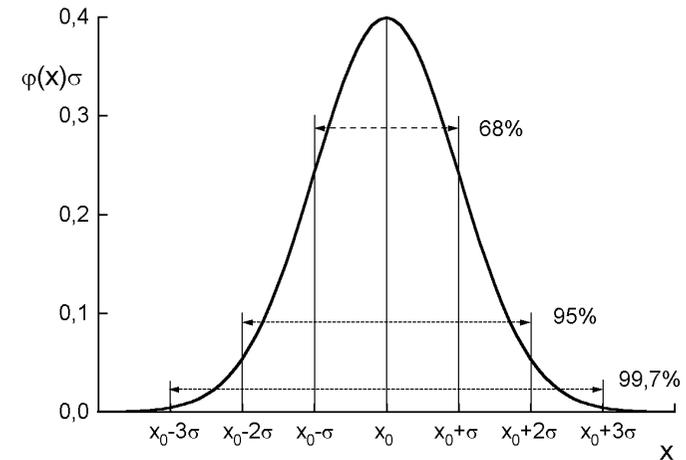


Abb.1: Funktion $\varphi(x)$ der Gauß'schen oder Normalverteilung mit wahrscheinlichstem Wert x_0 und den Bereichen $x_0 \pm \sigma$, $x_0 \pm 2\sigma$ und $x_0 \pm 3\sigma$ für die rel. Häufigkeit eines Messwertes x_i von 68 %, 95 % und 99,7 %

Vertrauensbereich $\bar{x} \pm u$ liegt, beträgt ca. 68 %, für den zwei- bzw. dreifachen Vertrauensbereich $\bar{x} \pm 2u$ bzw. $\bar{x} \pm 3u$ schon etwa 95 % bzw. 99,7 %.

Zu beachten ist jedoch, dass die Angabe einer statistischen Messunsicherheit bzw. eines statistischen Vertrauensbereiches für den Mittelwert \bar{x} einer Messreihe nur in Verbindung mit dem Schätzwert für mögliche systematische Fehler sinnvoll ist. Der insgesamt resultierende Fehler eines Messergebnisses ist immer die Summe der Beträge aus systematischen und unsystematischen Fehlern. So ist es z.B. nicht sinnvoll, eine Messung beliebig oft zu wiederholen, bloß um die statistische Messunsicherheit zu reduzieren, wenn gleichzeitig der Schätzwert für systematische Fehler viel größer ist.

Beispiel: Im Versuch A 9 (Bestimmung des Elastizitätsmoduls) soll der E-Modul eines Metallstabes aus der Biegung bestimmt werden. Es gilt der Zusammenhang:

$$z = \frac{l^3}{4Ebh^3} F \quad \text{bzw.} \quad E = \frac{l^3}{4bh^3} \frac{F}{z} \quad (8)$$

mit: z = Durchbiegung, l = Länge, b = Breite, h = Höhe des Stabes,
 E = E-Modul, F = angreifende Kraft

Typische Werte sind z.B. $l = 1$ m, $b = 15,15$ mm, $h = 8,0$ mm, sowie

F (N)	z (mm)	F/z (N/mm)
0	0	-
4,90	1,69	2,899
9,80	3,56	2,753
14,7	5,24	2,805
19,6	6,95	2,820
24,5	8,84	2,771
29,4	10,47	2,808

Damit ergibt sich:

für den Mittelwert des Verhältnisses F/z : $\overline{F/z} = 2,809$ N/mm

für die Standardabweichung: $s = 0,05$ N/mm

für die Messunsicherheit des Mittelwerts: $u = 0,02$ N/mm

also $F/z = (2,81 \pm 0,02)$ N/mm = $2,81$ N/mm $\pm 0,7$ %

Werden die Größen l , b und h als fehlerfrei und keine systematischen Messfehler angenommen, ergibt sich als Endergebnis für den E-Modul:

$$E = 9,05 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2} \pm 0,7 \% = (9,05 \pm 0,06) \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$$

Zu beachten ist bei der Angabe von Ergebnissen, dass der ermittelte Fehler nicht mit mehr als ein bis zwei Ziffern bzw. zwei Stellen hinter dem Komma angegeben wird. Entsprechend der Fehlerangabe ist auch das Endergebnis auf- oder abzurunden. Es macht meistens keinen Sinn und täuscht nur Genauigkeit vor, die vielen Nachkommastellen eines Taschenrechner-Displays anzugeben.

3. Fehlerfortpflanzung

Im allgemeinen ist zur Bestimmung einer physikalischen Größe y die Messung mehrerer einzelner (verschiedener) Parameter x_1, x_2, \dots erforderlich. Es stellt sich dann das Problem, wie die einzelnen Fehler Δx_i bei der Messung der Parameter die Unsicherheit Δy bei der Bestimmung der gesuchten Größe y beeinflussen. Für nicht zu große Fehler Δx_i gilt in 1. Näherung:

$$\Delta y \Big|_{x_{j \neq i} = \text{const}} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (9)$$

Als Abschätzung für den größtmöglichen Fehler unter Berücksichtigung aller Einzelfehler wird folgende Beziehung definiert:

$$(\Delta y)_{\text{max}} = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots \quad (10)$$

Beispiel: Im Versuch A3 (Dichte fester Körper) wird die Dichte ρ von Metallzylindern aus ihrer Masse m mittels Wägung und ihrem Volumen V mittels Messung der Abmaße (Durchmesser d , Höhe h) bestimmt. Es gilt:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 h} \quad (11)$$

Die Dichte ρ ist damit von der Bestimmung der 3 Einzelgrößen m , d und h abhängig. Für den *relativen Größtfehler* $(\Delta \rho / \rho)_{\text{max}}$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{\text{max}} &= \frac{1}{\rho} \left(\left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial d} \Delta d \right| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial h} \Delta h \right| \right) \\ &= \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| \frac{2 \Delta d}{d} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right| \end{aligned} \quad (12)$$

Typische Messergebnisse sind:

$$m = 132,980 \text{ g} \quad d = 2,50 \text{ cm} \quad h = 3,50 \text{ cm}$$

$$\Delta m = 2 \text{ mg} \quad \Delta d = 0,01 \text{ cm} \quad \Delta h = 0,01 \text{ cm}$$

Damit ergibt sich:

$$\rho = 7,74 \text{ g cm}^{-3}$$

$$(\Delta\rho/\rho)_{\max} = 1,5 \times 10^{-5} + 8,0 \times 10^{-3} + 2,9 \times 10^{-3} \approx 1,09 \times 10^{-2} \approx 1,1 \%$$

$$\rho = 7,74 \text{ g cm}^{-3} \pm 1,1 \% = (7,74 \pm 0,09) \text{ g cm}^{-3}.$$

Beispiel: Im Versuch B 2 (Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester Körper) soll der Wasserwert des verwendeten Kalorimeters bestimmt werden. Es gilt:

$$W_K = m_2 \frac{T_2 - T_M}{T_M - T_1} - m_1 \quad (13)$$

Hierbei ist:

- W_K = Wasserwert des Kalorimeters
- m_1, T_1 = Masse, Temperatur des kalten Wassers im Kalorimeter
- m_2, T_2 = Masse, Temperatur des hinzugefügten heißen Wassers
- T_M = die sich einstellende Mischungstemperatur

W_K ist von der Bestimmung der 5 Einzelgrößen m_1, m_2, T_1, T_2 und T_M abhängig. Damit wird der absolute Größtfehler $(\Delta W_K)_{\max}$:

$$(\Delta W_K)_{\max} = \left| \frac{\partial W_K}{\partial m_1} \Delta m_1 \right| + \left| \frac{\partial W_K}{\partial m_2} \Delta m_2 \right| + \left| \frac{\partial W_K}{\partial T_1} \Delta T_1 \right| + \left| \frac{\partial W_K}{\partial T_2} \Delta T_2 \right| + \left| \frac{\partial W_K}{\partial T_M} \Delta T_M \right| \quad (14)$$

bzw.

$$(\Delta W_K)_{\max} = \left| \Delta m_1 \right| + \left| \frac{(T_2 - T_M) \Delta m_2}{T_M - T_1} \right| + \left| \frac{(T_2 - T_M) m_2 \Delta T_1}{(T_M - T_1)^2} \right| + \left| \frac{m_2 \Delta T_2}{T_M - T_1} \right| + \left| \frac{(T_2 - T_1) m_2 \Delta T_M}{(T_M - T_1)^2} \right| \quad (15)$$

Typische Werte sind:

$$m_1 = 264,5 \text{ g} \quad \Delta m_1 = 0,1 \text{ g} \quad T_2 = 51,8^\circ\text{C} \quad \Delta T_2 = 0,1^\circ\text{C}$$

$$m_2 = 219,7 \text{ g} \quad \Delta m_2 = 0,1 \text{ g} \quad T_M = 34,9^\circ\text{C} \quad \Delta T_M = 0,1^\circ\text{C}$$

$$T_1 = 22,4^\circ\text{C} \quad \Delta T_1 = 0,1^\circ\text{C}$$

Damit ergibt sich:

$$W_K = 32,53 \text{ g}$$

$$(\Delta W_K)_{\max} = 0,1 \text{ g} + 0,14 \text{ g} + 2,38 \text{ g} + 1,76 \text{ g} + 4,13 \text{ g} \approx 8,5 \text{ g}$$

$$W_K = (33 \pm 9) \text{ g} = 33 \text{ g} \pm 26 \%$$

Bei der Berechnung des größten Fehlers nach der Fehlerfortpflanzung sollte man den Einfluss eines jeden Parameters diskutieren. Im obigen Beispiel sieht man, dass die Fehler in der Temperaturmessung den größten Einfluss auf die Genauigkeit der Wasserwertbestimmung hat.

4. Ausgleichsgeraden

Oft soll in der Physik ein theoretisch begründeter Zusammenhang zwischen zwei Größen x und y im Experiment bestätigt werden. Nicht selten besteht zwischen den Größen x und y ein linearer Zusammenhang, d.h.

$$y = a + bx \quad (16)$$

Da bekanntlich jede Messung mit einem Fehler behaftet ist, werden die Messwerte (x_i, y_i) bei einer graphischen Darstellung $y_i = f(x_i)$ mehr oder weniger um eine Gerade streuen. Gesucht ist diejenige Gerade, die die fehlerbedingten Abweichungen bestmöglich ausgleicht. Diese kann im einfachsten Fall durch eine visuelle Schätzung, d.h. das Zeichnen einer geeigneten Geraden mit einem Lineal gefunden werden. Objektiver lassen sich die Konstanten a und b der Geradengleichung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnen.

Man untersucht, für welche Konstanten a und b der Ausdruck:

$$\sum (a + bx - y)^2$$

ein (absolutes) Minimum einnimmt. Die Konstanten erfüllen dann die Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum (a + bx - y)^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} \sum (a + bx - y)^2 = 0 \quad (17)$$

Die Differentiation liefert das Gleichungssystem:

$$an + b \sum x = \sum y, \quad a \sum x + b \sum x^2 = \sum xy \quad (18)$$

mit der Lösung:

$$a = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (19)$$

Beachte: Für eine Ausgleichsgerade, welche durch den Koordinatenursprung verlaufen soll (a = 0), d.h. $y = b x$ lautet die entsprechende Lösung:

$$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \quad (20)$$

Das Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate wird fast immer bei der Suche des besten Fits angewendet. Die Geradengleichung ist (nach der Mittelwertbildung) der einfachste und gebräuchlichste Fall und daher auf fast jedem Taschenrechner verfügbar.

Der häufig benutzte Regressionskoeffizient R^2 ist mit Vorsicht zu verwenden. Mit ihm kann die Güte der Fitfunktion mehrerer unabhängiger Messreihen miteinander verglichen werden. Der Regressionskoeffizient von nur einer Messreihe hat in physikalischer Hinsicht keine direkte Aussagekraft.

In Fällen, in denen die Größe Y(X) nicht linear von X abhängt, kann oft der gesuchte formale Zusammenhang durch geeignete Transformation $y(X,Y), x(X,Y)$ in eine Geradengleichung $y = a + bx$ übergeführt werden, z.B.:

$Y = AX^B$	$y = \ln(Y)$	$x = \ln(X)$
	$a = \ln(A)$	$b = B$
$Y = A \exp(BX)$	$y = \ln(Y)$	$x = X$
	$a = \ln(A)$	$b = B$
$Y = AX + BX^3$	$y = Y/X$	$x = X^2$
	$a = A$	$b = B$