

## Versuch D 2: Linsenfehler

**1. Literatur:** Walcher, Praktikum der Physik  
 Gerthsen/Kneser/Vogel, Physik  
 Pohl, Optik und Atomphysik  
 Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik,  
 Bd. III, Optik

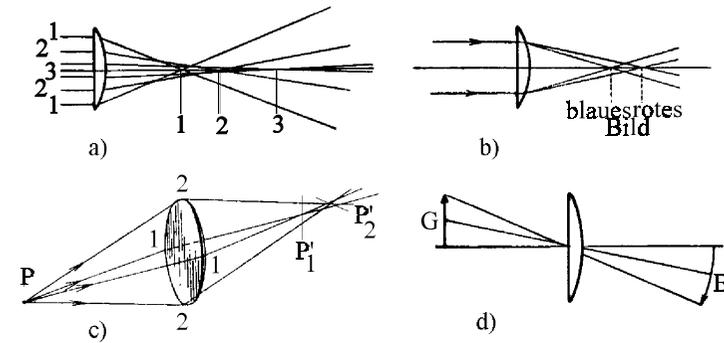
**Stichworte:** Lichtbrechung, Abbildungen durch dünne sphärische Linsen, achsennahe und achsenferne Strahlenbündel, dicke Linsen, Linsen- bzw. Abbildungsfehler: sphärische Aberration (Zonenfehler), Astigmatismus und Bildfeldwölbung, Koma und Verzeichnung, Chromatische Aberration (Farbfehler)

### 2. Grundlagen

Bei der Abbildung von Objekten durch Linsen treten eine Reihe von Fehlern auf, deren Ursachen bei der Herleitung der einfachen allgemeinen Abbildungsgleichungen unberücksichtigt bleiben oder vernachlässigt werden. So wird bei den einfachen Linsenformeln und Abbildungsgleichungen vorausgesetzt, dass es sich um sehr dünne Linsen handelt und die Abbildung durch schlanke, achsennahe Strahlenbündel geschieht. Ferner bleibt unberücksichtigt, dass die Lichtbrechung durch die Linse und damit ihre Brennweite von der Frequenz (Farbe) des Lichtes abhängt, so dass farbige Objekte durch einfache Linsen im allgemeinen nicht mehr einheitlich abgebildet werden können. Man unterscheidet deshalb grob *monochromatische* und *chromatische Abbildungsfehler*. Monochromatische Abbildungsfehler sind *sphärische Aberration*, *Astigmatismus*, *Bildfeldwölbung*, *Koma* und *Verzeichnung*. Chromatische Fehler (chromatische Aberration) beobachtet man als *Farbfehler* und *Farbsaumfehler*. Abb.1 zeigt schematisch die Wirkungen der wichtigsten Abbildungsfehler.

#### 2.1 Sphärische Aberration

Sphärische Linsen mit großem Durchmesser und starker Krümmung haben einen *Zonen- oder Öffnungsfehler*, die *sphärische Aberration*, die darauf beruht, dass achsennahe Strahlen und achsenferne Strahlen eines zur optischen Achse parallel einfallenden Bündels unter verschiedenen Einfallswinkeln auf die verschiedenen Linsenzonen fallen. Bei einer Sammellinse werden die Strahlen so gebrochen, dass achsenferne Strahlen die optische Achse in einem Punkt schneiden, der näher an der Linse liegt als der Brennpunkt, der zum Gebiet der achsennahen Strahlen (*paraxiales Gebiet*) gehört. Entsprechend schneiden sich auch bei einer Zer-



**Abb.1:** Schematische Darstellung der wichtigsten Abbildungsfehler:  
 a) sphärische Aberration, b) chromatische Aberration ( $n_{\text{blau}} > n_{\text{rot}}$ )  
 c) Astigmatismus, d) Bildfeldwölbung

streuungslinse die rückwärtig verlängert gedachten, gebrochenen achsenfernen Strahlen näher an der Linse als die achsennahen.

Zur Behebung des Zonenfehlers kann man demnach Sammell- und Zerstreuungslinsen in passender Auswahl zusammenstellen. Dabei ist eine Korrektur des Öffnungsfehlers nur für eine schmale Zone möglich und nur für einen bestimmten Objekt- und Bildabstand. So wählt man für ein Kamera- oder Fernrohrobjektiv einen unendlich fernen Objektpunkt (sehr große Gegenstandsweite), für ein Mikroobjektiv entsprechend einen sehr nahen Objektpunkt, der dicht vor dem objektseitigen Brennpunkt liegt (minimale Gegenstandsweite).

#### 2.2 Bildfeldwölbung und Astigmatismus

Bildet man Punkte eines Gegenstands ab, die in einer Ebene senkrecht zur optischen Achse und von ihr weit entfernt liegen, so ist ihre Gegenstandsweite (Abstand zum Zentrum der Linse) größer als die achsennahe Punkte des Gegenstands. Infolgedessen tritt eine Bildfeldwölbung auf, d.h. die Punkte werden nicht wieder auf einer Ebene sondern auf einer zur Linse hin gekrümmten Fläche abgebildet. Gleichzeitig tritt für achsenferne Punkte des Gegenstands Astigmatismus auf: Die brechende Wirkung der Linse ist für schräg zur optischen Achse einfallende Lichtstrahlen nicht mehr rotationssymmetrisch zum Haupt- bzw. Mittelpunktstrahl. Der Punkt des Gegenstands wird nicht wieder in einen Punkt sondern bestenfalls in zwei zueinander senkrecht liegende Bildstriche mit unterschiedlichem Abstand zur Linse abgebildet (s. Abb. 1c). Daraus folgt z.B., dass

zur optischen Achse konzentrische Kreislinien des Gegenstands jeweils an einer anderen Stelle im Bildraum *scharf*, d.h. senkrecht zur Linienrichtung fokussiert abgebildet werden als radial von der optischen Achse ausgehende Linien des Gegenstands.

### 2.3 Koma und Verzeichnung

Der Punkt eines Gegenstandes, der stark seitlich von der optischen Achse liegt, wird durch eine Linse infolge eines asymmetrischen Öffnungsfehlers bei Verwendung von Blenden nicht wieder in einem Punkt abgebildet, sondern häufig in ein Lichtgebilde, das aus einem relativ scharfen Kern und einem von der optischen Achse wegweisenden kometenartigen Schweif besteht. Diese Erscheinung wird mit *Koma* bezeichnet. Eine *Verzeichnung* des Bildes liegt vor, wenn seine Randpartien entweder zu optischen Achse hin gestaucht oder auseinandergezogen sind (z.B. tonnen- bzw. kissenförmige Verzeichnung eines Quadrates). Dieser Abbildungsfehler entsteht durch die Einschränkung schräg zur optischen Achse verlaufender Strahlenbündel mittels Blenden. Diese werden benutzt, um wiederum andere Linsenfehler wie Astigmatismus und Bildfeldwölbung zu verringern.

### 2.4 Chromatische Aberration

Für die Brennweite  $f$  einer dünnen, bikonvexen sphärischen Linse mit dem Brechungsindex  $n$  und den Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  gilt:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$

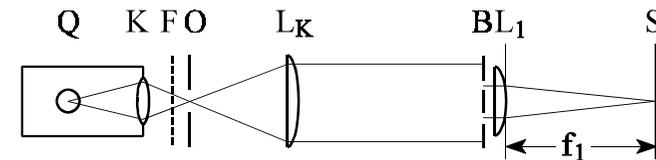
Da der Brechungsindex des Linsenmaterials i.a. von der Frequenz  $\nu$  bzw. der Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes abhängt,  $n = n(\lambda)$ , ist mit Gl. (1) auch die Brennweite einer solchen Linse von der Lichtwellenlänge abhängig,  $f = f(\lambda)$ . Im Falle der sog. *normalen Dispersion*, d.h. für den Fall dass  $n$  mit wachsender Wellenlänge abnimmt, ist die Brennweite für blaues, kurzwelliges Licht geringer als für rotes, langwelliges (s. Abb. 1 b). Für einfache Linsen ist deshalb der Bildort mit einem *Farbort- oder Farbfehler* und das Bild mit einer Farbabweichung der Vergrößerung, dem *Farbsaumfehler* behaftet. Zur Vermeidung bzw. Verringerung solcher Fehler werden in hochwertigen Objektiven, sog. *Achromaten*, Linsen aus unterschiedlichen Materialien mit verschiedener Dispersion  $n(\lambda)$  verwendet.

### 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie mit einem monochromatischen, parallelen Lichtstrahlenbündel und mittels verschiedener Zonenblenden mit Radius  $r$  die Brennweite  $f(r)$  einer Plankonvexlinse:
  - a) für die Stellung der Linse mit planer Fläche zur Lichtquelle,
  - b) für die Stellung mit gekrümmter Fläche zur Lichtquelle.
- 2. Aufgabe:** Stellen Sie  $f(r)$  für beide Linsenstellungen graphisch dar und bestimmen Sie die sphärische Aberration  $\Delta f = f(r) - f(0)$ . Begründen Sie die Ergebnisse.
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie mit Hilfe des Bessel-Verfahrens im paraxialen (achsennahen) Gebiet mittels drei verschiedener Farbfilter die die Brennweite  $f(\lambda)$ , dh. die chromatische Aberration der Plankonvexlinse.
- 4. Aufgabe:** Stellen Sie die Funktion  $f(\lambda)$  und mittels Gl. (1) den Verlauf  $n(\lambda)$  graphisch dar.

### 4. Versuchsdurchführung

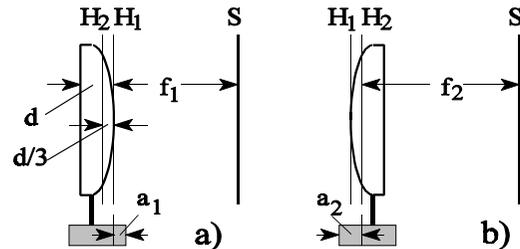
#### 4.1 u. 4.2 Sphärische Aberration



**Abb.2:** Versuchsaufbau mit Strahlengang zur Bestimmung der sphärischen Aberration: Q Lichtquelle, K Kondensator, F Filter, O Objekt,  $L_K$  Kollimatorlinse, B Zonenblende,  $L_1$  Versuchslinse, S Schirm

Abb. 2 zeigt den Versuchsaufbau auf einer optischen Bank zur Bestimmung der sphärischen Aberration. Zur Herstellung eines parallelen Lichtbündels wird zunächst die Kollimatorlinse  $L_K$  solange verschoben, bis sie auf dem Schirm einen Lichtfleck vom Durchmesser dieser Linse erzeugt, Zur gleichmäßigen Aus-

leuchtung empfiehlt es sich, vor die Objektblende O eine lichtzerstreuende Mattglasscheibe oder ein Stück Papier zu setzen. Man stelle darauf in den Parallelstrahlengang eine Kreisblende B und so dicht wie möglich dahinter die Versuchslinse  $L_1$ . Auf dem Schirm S wird das von  $L_1$  erzeugte Bild von O aufgefangen und durch Verschieben von S fokussiert. Die Positionen von  $L_1$  und S sind gemäß der Marken an den optischen Reitern zu notieren.



**Abb.3:** Lage der Hauptebenen  $H_1$  und  $H_2$  bzw. Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  der Versuchslinse für Strahlengang a) von der planen zur konvexen, b) von der konvexen zur planen Linsenoberfläche

Zu beachten ist, dass diese Positionen i.a. nicht mit denen der optisch relevanten Ebenen übereinstimmen. Für die Linse  $L_1$  sind dies die Hauptebenen  $H_1$  und  $H_2$  (s. Abb. 3). Die Hauptebene  $H_1$  tangiert die konvexe Linsenoberfläche in ihrem Mittelpunkt (optische Achse). Diese Position wird relativ zur Reitermarkierung zweckmäßigerweise mit einem Lineal über den Abstand  $a_1$  zur Seitenkante des Linsenreiters bestimmt. Die Lage der Hauptebene  $H_2$ , relevant für die Stellung der um  $180^\circ$  gedrehten Linse hat den Abstand  $a_2$  zur gleichen Reiterkante. Dieser hängt auch von der Dicke  $d$  und dem Brechungsindex  $n$  der verwendeten Linse ab. Bei der im Versuch benutzten Linse ist der Abstand zwischen  $H_1$  und  $H_2$  ca.  $d/3$  und  $d = 20$  mm, so dass  $a_2 - a_1 = d/3 = 6,7$  mm. Bestimmen Sie ebenso die genaue Lage der Schirmoberfläche relativ zur Reitermarkierung des Schirms.

Für jede der beiden Linsenstellungen sind die Positionen von Linsenreiter und Schirm jeweils 5 mal zu bestimmen, wobei jedesmal der Reiter von  $L_1$  ein wenig verschoben wird. Ermitteln Sie hieraus und aus den oben gemachten Angaben die Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$ .

Führen Sie den Versuch für alle vorhandenen Zonenblenden durch und tragen Sie die ermittelten Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  als Funktion des Radius  $r$  der Zonenblenden

auf. Dabei ist  $r$  nicht der arithmetische Mittelwert des äußeren und inneren Radius  $r_a$  bzw.  $r_i$  der Blende sondern der geometrische, der die Blendenfläche halbiert.

$$r = \sqrt{\frac{r_i^2 + r_a^2}{2}}$$

Tragen Sie  $f_1$  und  $f_2$  als Funktion von  $r$  auf und bestimmen Sie durch Extrapolation  $f_1(0)$  bzw.  $f_2(0)$  sowie die sphärische Aberration  $\Delta f_1(r)$  und  $\Delta f_2(r)$ .

Bestimmen Sie die absolute und relative Messunsicherheit (Standardabweichung des Mittelwertes) für  $f_{1,2}$  bzw.  $\Delta f_{1,2}$  aus den 5 Einzelmessungen von  $f$  für die jeweilige Linsenstellung und Zonenblende. Diskutieren Sie das Messergebnis im Rahmen der ermittelten statistischen und abgeschätzten systematischen Fehler bei der Bestimmung der Brennweiten. Nach der Theorie müsste  $f_1(0) = f_2(0)$  sein. Wenn dies nicht der Fall ist, liegt es vor allem an der sehr groben Einstellung des parallelen Strahlengangs. Deshalb werden auch alle Brennweiten  $f_{1,2}(r)$  mit einem großen systematischen Fehler behaftet sein, der sich jedoch bei der Differenzbildung  $\Delta f$  zum größten Teil aufhebt. Begründen Sie qualitativ die verschiedenen Ergebnisse für  $\Delta f_1$  und  $\Delta f_2$ .

### 4.3 u. 4.4 Chromatische Aberration

Man benutze einen Versuchsaufbau ähnlich Abb. 2. Zur Abbildung des Objekts wird jedoch nicht die Kollimatorlinse  $L_K$  sondern lediglich die Versuchslinse  $L_1$  (bzw.  $L_2$ , gedreht) in möglichst geringem Abstand zur Zonenblende für das paraxiale Gebiet verwendet. Legen Sie zunächst für  $L_1$  die konstante Entfernung  $s$  (Objekt - Schirm) fest und überprüfen Sie, ob bei zwei verschiedenen Einstellungen  $L^I$  und  $L^{II}$  die Linse ein reelles Bild erzeugt. Bestimmen Sie den Abstand  $e = L^I - L^{II}$  5 mal und berechnen Sie den Mittelwert von  $e$ .

Wiederholen Sie den Versuch mit den anderen zur Verfügung stehenden Farbfiltern. Führen Sie im Anschluss daran die gleichen Messungen für die um  $180^\circ$  gedrehte Linse ( $L_2$ ) durch.

Berechnen Sie aus  $s$  und  $e$  mit der Besselschen Gleichung (s. Versuch D1) die Brennweiten  $f_{1,2}$  und tragen Sie  $f_1$  sowie  $f_2$  über der Wellenlänge  $\lambda$  der benutzten Farbfilter auf.

Berechnen Sie für beide Linsenstellungen  $L_{1,2}$  und die benutzten Farbfilter die Messunsicherheit für  $e$  aus den jeweils 5 Einzelmessungen. Ermitteln Sie hieraus und zusammen mit einem Fehler  $\Delta s = \pm 2$  mm den absoluten und relativen Größtfehler

von  $f_{1,2}$ . Tragen Sie den absoluten Größtfehler als Fehlerbalken in das Diagramm  $f_{1,2}(\lambda)$  ein.

Bestimmen Sie mit Gl. (1) und dem Krümmungsradius  $r = 8,3$  cm für die verwendete Linse aus den Messergebnissen  $f_{1,2}(\lambda)$  den Verlauf  $n(\lambda)$  und tragen Sie diesen wie die Brennweiten  $f$  über  $\lambda$  auf.

### 5. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Nennen Sie die wichtigsten Abbildungsfehler einfacher Linsen.
- 2) Beschreiben Sie die Erscheinungsform der *sphärischen Aberration*. Wie kann dieser Linsenfehler klein gehalten werden?
- 3) Wie macht sich der *Astigmatismus* bei der Abbildung bemerkbar. Welche Form einer Linse ist geeignet, diesen Fehler zu korrigieren?
- 4) Was versteht man unter dem *paraxialem Gebiet* des Strahlengangs einer Abbildung?
- 5) Was versteht man unter *Verzeichnung* einer Abbildung und wie kommt sie zustande?
- 6) Was ist die *Dispersion* des Lichtes? Welche Abbildungsfehler verursacht sie? Wie können diese verringert oder beseitigt werden?
- 7) Bei welchen optischen Bauelementen treten Dispersion und durch sie bedingte Abbildungsfehler nicht auf?