

Versuch D 1: Brennweite von Linsen und Linsensystemen

1. Literatur: Bergmann-Schäfer, Experimentalphysik, Bd.III, Optik
Walcher, Praktikum der Physik
Westphal, Physikalisches Praktikum

Stichworte: Sphärische Linsen, Brennweite, Objektweite, Bildweite, Brechkraft, Abbildungsgleichungen, reelles-virtuelles Bild, Abbildungsmaßstab, Lupe, Bessel-Verfahren, Hauptebenen, Linsensysteme

2. Grundlagen

2.1 Abbildungsgleichung

Im vorliegenden Versuch werden sphärische, dünne Linsen verwendet, bei denen sich Brennweite sowie Objekt- und Bildweite von der (geometrisch definierten) Mittelebene (Hauptebene) bestimmen lassen. Eine sphärische Linse besteht aus einem optisch durchlässigen, leicht brechenden Stoff (Glas, Kunststoff), der von zwei Kugelflächen oder einer Kugelfläche und einer Ebene begrenzt wird. Je nach Anordnung der begrenzenden Flächen unterscheidet man zwischen Sammell- und Zerstreuungslinsen. Sammellinsen (bikonvex, plankonvex) vereinen ein parallel zur optischen Achse (= Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der Begrenzungsflächen) einfallendes Strahlenbündel in einem hinter der Linse im Bildraum liegenden Brennpunkt F', Zerstreuungslinsen (bikonkav, plankonkav, konvexkonkav) zerstreuen ein parallel einfallendes Strahlenbündel im Bildraum so, als ob es von einem im Gegenstandsraum vor der Linse befindlichen Brennpunkt F' herkäme.

Solange man es mit sehr schlanken (achsennahen) Parallellichtbündeln zu tun hat, die einen so kleinen Neigungswinkel α gegen die optische Achse besitzen, dass man ohne nennenswerten Fehler $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$ setzen kann ($\alpha \leq 5^\circ$), befindet man sich im sog. *Gaußschen Abbildungsbereich*. In diesem Bereich gestattet die Kenntnis der Brennweite f sowie die Lage der Hauptebene H (Mittelebene der Linse) die eindeutige Konstruktion der optischen Abbildung, wenn der Abstand g (Gegenstandsweite) vom Gegenstand G zur Hauptebene vorgegeben wird (geometrische Strahlenoptik).

Die Beziehung zwischen Brennweite f , Gegenstandsweite g und Bildweite b ist durch die Abbildungsgleichung gegeben, die für eine dünne, symmetrische ($f = f'$) bikonvexe ($f > 0$) bzw. bikonkave ($f < 0$) Linse lautet:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Die Konstruktion der Abbildung nach der geometrischen Strahlenoptik ist für eine dünne Sammellinse für den Fall $2f > g > f$ in Abb.1 beispielhaft gezeigt:

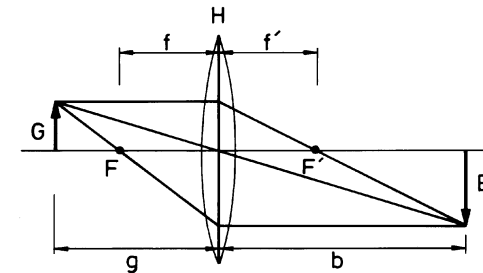


Abb.1: Strahlengang bei der Abbildung durch eine dünne Sammellinse für $2f > g > f$

Es entsteht im Beispiel der Abb.1 ein sog. *reelles*, umgekehrtes, vergrößertes Bild B des Gegenstandes im Bildraum. Ist $f > g > 0$ (Nullpunkt in der Hauptebene) so wirkt die Sammellinse als Lupe, und es entsteht ein aufrechtes, vergrößertes, sog. *virtuelles* Bild des Gegenstandes, das jedoch im Gegenstandsraum liegt, da für $g < f$ nach der Abb.Gl. (1) b negativ wird. Diese Zusammenhänge lassen sich anhand der graphischen Darstellung der Abbildungsgleichung (s. Abb. 2) leicht verständlich machen. Mit der Abbildungsgleichung kann man also für eine bikonvexe Linse nach experimenteller Bestimmung der Bild- bzw. der Gegenstandsweite die Brennweite f ermitteln. Das Verfahren ist jedoch ungenau.

2.2 Bessel -Verfahren

Ein Verfahren, das eine Bestimmung der Brennweite einer (auch dicken) Linse mit höherer Genauigkeit erlaubt, wurde erstmals 1840 von F.W. Bessel angegeben. Es geht davon aus, dass es für hinreichend großen *festen* Abstand von Gegenstand und Bild (Schirm), $s > 4f$, zwischen Gegenstand und Bild *zwei* Linsenstellungen (L_1, L_2 in Abb.3) gibt, die einmal ein scharfes, vergrößertes, reelles Bild (Position L_1 , Bild B_1) zum anderen ein scharfes, verkleinertes, reelles Bild (Position L_2 , Bild B_2) des Gegenstands liefern. Die erforderlichen Linsenstellungen L_1, L_2 sind dabei symmetrisch um die Mitte von s , wie in Abb. 3 verdeutlicht, und haben den Abstand e .

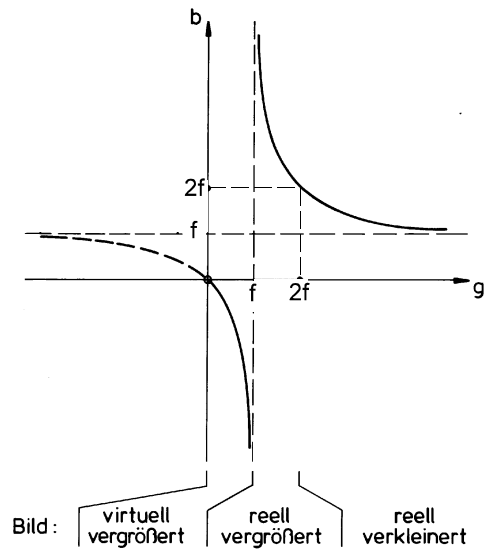


Abb.2: Graphische Darstellung der Abbildungsgleichung $b(g)$ für eine dünne Sammellinse

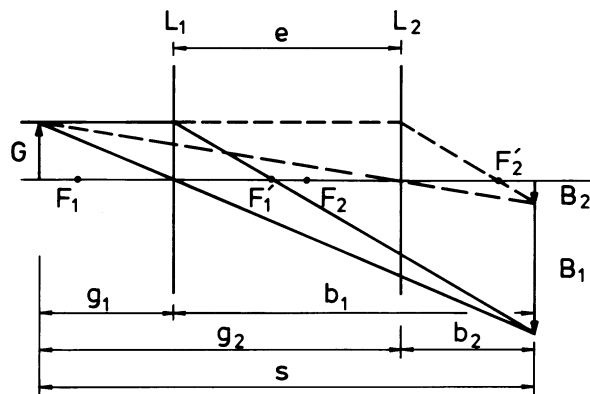


Abb.3: Bildentstehung nach dem Bessel-Verfahren für 2 symmetrische Linsenstellungen einer Sammellinse L_1 (—) und L_2 (- - -). Die Indices entsprechen der jeweiligen Linsenstellung.

Aus Gl. (1) errechnet man, dass der Wechsel zwischen den Positionen L_1 und L_2 einer Vertauschung der Gegenstandsweite g und der Bildweite b entspricht. Die ursprüngliche Gegenstandsweite g_1 der Einstellung L_1 wird zur Bildweite b_2 der zweiten Einstellung L_2 , d.h. $g_1 = b_2$. Entsprechend gilt $g_2 = b_1$.

Gemäß Abb.3 erhält man:

$$b_1 + g_1 = s = g_2 + b_2 \quad (2)$$

$$g_2 - g_1 = e = b_1 - b_2 \quad (3)$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Gln. (2) und (3) erhält man mit $g_1 = b_2$ bzw. $g_2 = b_1$:

$$b_1 = \frac{1}{2}(s + e) \quad (4)$$

Setzt man Gl. (4) und (5) in die Abbildungsgleichung (1) ein, so erhält man nach Umformen:

$$g_1 = \frac{1}{2}(s - e) \quad (5)$$

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s} \quad \text{Bessel-Gleichung} \quad (6)$$

2.3 Brennweite einer Zerstreulinse (Linsensystem)

Zerstreulinse erzeugen nur virtuelle Bilder, so dass eine direkte Brennweitenbestimmung nach dem Bessel-Verfahren nicht möglich ist. Kombiniert man jedoch die Zerstreulinse mit einer Sammellinse großer, bekannter Brechkraft, so entsteht aus beiden Linsen ein Linsensystem mit positiver Brennweite, das reelle Bilder erzeugt. Dies ist in Abb. 4 schematisch gezeigt. Beide verwendete Linsen seien dünne Linsen, d.h. sie haben nur je eine Hauptebene, S in Abb. 4 für die Sammellinse, Z für die Zerstreulinse. Beide Linsen seien außerdem so aneinander angebracht, dass der Abstand zwischen S und Z gleich t sei.

Die für das Linsensystem bei der Abbildung maßgebliche Hauptebene H kann nun

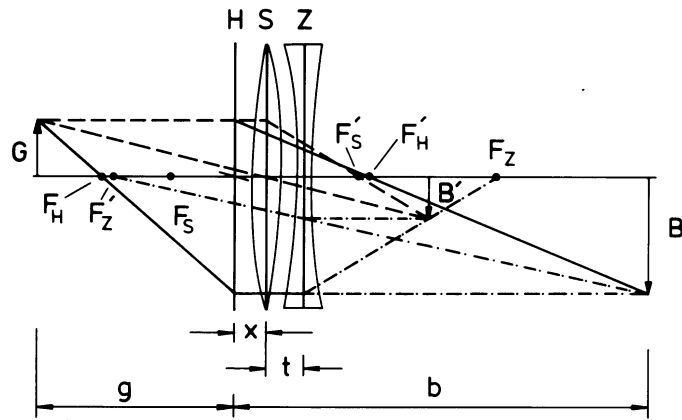


Abb.4: Abbildung nach der geometr. Strahlenoptik für ein Linsensystem aus einer dünnen Sammellinse (Hauptebene S) und einer dünnen Zerstreuungslinse (Hauptebene Z). H = Hauptebene des Linsensystems, t = Abstand SZ, x = Abstand HS. Die Brennpunkte, von den verschiedenen Hauptebenen aus gerechnet, sind mit entsprechenden Indices bezeichnet. Strahlengang für Abbildung von G durch Sammellinse (Bild B') gestrichelt, Strahlengang für Abbildung von B' durch Zerstreuungslinse (Bild B) strichpunktierter Strahlenverlauf in Abb. 4). Danach lässt sich durch Verbinden der Spitzen von G und B der Fußpunkt der Hauptebene H des Linsensystems und damit die Hauptebene selbst auf der optischen Achse eindeutig festlegen (Verbindungsline in Abb. 4 nicht gezeichnet). Man überzeuge sich anhand des Strahlengangs (ausgezogene Linien in Abb. 4), dass tatsächlich nur unter Benutzung der Hauptebene H das Linsensystem vom Gegenstand G das reelle Bild B entwirft. Der Strahlengang legt gleichzeitig auch die zur Hauptebene H gehörigen Brennpunkte F_H bzw. F'_H und damit die Brennweite $f_{1,2}$ des Linsensystems fest.

entsprechend Abb. 4 auf folgende Weise gewonnen werden: Man konstruiert zunächst nach den Regeln der geometrischen Strahlenoptik das reelle Bild B', das die Sammellinse vom Gegenstand G entwirft (Strahlenverlauf gestrichelt in Abb.4). Danach konstruiert man das reelle Bild B, das die Zerstreuungslinse (negative Brechkraft) von B' entwirft. (strichpunktierter Strahlenverlauf in Abb. 4). Danach lässt sich durch Verbinden der Spitzen von G und B der Fußpunkt der Hauptebene H des Linsensystems und damit die Hauptebene selbst auf der optischen Achse eindeutig festlegen (Verbindungsline in Abb. 4 nicht gezeichnet). Man überzeuge sich anhand des Strahlengangs (ausgezogene Linien in Abb. 4), dass tatsächlich nur unter Benutzung der Hauptebene H das Linsensystem vom Gegenstand G das reelle Bild B entwirft. Der Strahlengang legt gleichzeitig auch die zur Hauptebene H gehörigen Brennpunkte F_H bzw. F'_H und damit die Brennweite $f_{1,2}$ des Linsensystems fest.

Für die Brennweite eines Linsensystems gilt allgemein:

$$\frac{1}{f_{1,2}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{t}{f_1 f_2} \quad (7)$$

wobei t der Abstand der Hauptebenen der beiden Linsen (in Abb.4 zwischen S u. Z) ist. (Man überlege sich wie Gl. (7) lautet, wenn man sie nach f_2 auflöst!)

Beim vorliegenden Versuch wird die dünne Zerstreuungslinse auf eine Sammellinse bekannter Brennweite so aufgesteckt, dass der Abstand t mit einer Schieblehre bestimmt werden kann, jedoch nicht der Abstand x zwischen Hauptebene und S. S bildet gleichzeitig den Fußpunkt (Ablesemarkierung) auf der optischen Bank.

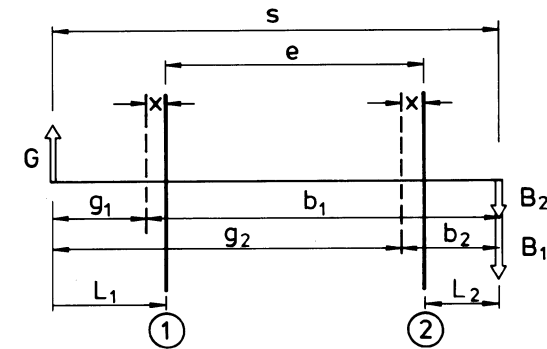


Abb.5: Abbildung nach dem Bessel-Verfahren für ein Linsensystem entspr. Abb.4. ① und ② bezeichnen die zwei Positionen entspr. Abb.3, Hauptebene H gestrichelt, Fußpunkte auf der optischen Bank bzw. Halterung des Linsensystems dick ausgezogene Linien.

Die Verhältnisse bei der Anwendung des Bessel-Verfahrens verdeutlicht Abb.5. Bei vorgegebenem festen Abstand s von Gegenstand G und Bild B liest man aus den Reiterstellungen 1 bzw. 2 die Längen L_1 und L_2 ab und bestimmt den Abstand e. (Linsensystem bei Positionstausch nicht drehen!) Aus der Bessel-Gleichung (6) berechnet man den Wert für die Brennweite $f_{1,2}$ des Linsensystems und aus Gl.(7)(nach Umformen) die (negative!) Brennweite f_2 der Zerstreuungslinse.

Wie Abb.5 zeigt, gilt:

$$L_1 = g_1 + x ; \quad L_2 = b_2 - x = g_1 - x \quad (8)$$

Aus der Differenz $L_1 - L_2$ folgt dann:

$$x = \frac{L_1 - L_2}{2} \quad (9)$$

der Abstand zwischen Linsenhalter und Hauptebene. Der Versuch wird zeigen, dass die Hauptebene H außerhalb des Linsensystems liegt. Das ist auch in der Praxis oft der Fall (Photolinsen, Türspion).

3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Brennweite einer Sammellinse.
- 2. Aufgabe:** Überprüfen Sie die Ergebnisse in einer graphischen Auftragung $g(b)$.
- 3. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Brennweite einer Zerstreuungslinse durch Kombination mit einer Sammellinse bekannter Brennweite zu einem Linsensystem nach dem Bessel-Verfahren.
- 4. Aufgabe:** Berechnen Sie den Abstand der Hauptebene des Linsensystems vom Linsenhalter und diskutieren Sie die Ergebnisse.

4. Versuchsdurchführung

Für den Messversuch wird eine optische Bank mit mm-Teilung benutzt, auf der die optischen Geräte (Lampe, Gegenstand, Linse und Schirm) in sog. Reitern, die seitlich an ihrem Fuß eine Positionsmarke besitzen, verschoben werden können. Die genaue Lage des Gegenstandes (Diapositiv) und des Schirmes stimmt aus konstruktiven Gründen nicht mit der Ablesemarke des entsprechenden Reiters überein. Die jeweilige Differenz der Positionen muss daher extra bestimmt und in der Versuchsauswertung berücksichtigt werden, um die tatsächliche Gegenstands- und Bildweite zu erhalten. (Man lote z.B. mit einem rechtwinkligen Dreieck den Ort des Diapositivs in der Mitte der beiden Glasplatten) auf die Skala und bestimme die Differenz.

Bei der Versuchslinse ist zu beachten, dass die Hauptebene dieser (dünnen) Linse im allgemeinen ebenfalls nicht mit der Markierung am Reiter übereinstimmt. Diese

Abweichung kompensiert man dadurch, dass man jede Messung doppelt durchführt - das zweite Mal mit um 180° im Reiter gedrehter Linse - und aus den jeweiligen Messwerten den Mittelwert bildet.

4.1 Bestimmung der Brennweite einer Sammellinse

Messung von Gegenstands- und Bildweite

Man erzeuge bei fest eingestelltem Abstand s von Gegenstand und Schirm zuerst ein vergrößertes Bild des Diapositivs und lese die Stellung der Linse ab. Wegen der Unsicherheit in der Beurteilung der Schärfe des Bildes wird diese Messung viermal durchgeführt (zweimal von jedem der Experimentierenden).

Man drehe die Linse um 180° und messe wiederum viermal. Aus den 8 Werten bilde man den Mittelwert und berechne aus diesem die Gegenstandsweite g_1 . Bei gleichem, festen Abstand s wiederhole man dann die entsprechenden 8 Messungen bei der Einstellung des verkleinerten Bildes und bestimme die Gegenstandsweite g_2 .

Aus Gl. (2) erhält man dann die Bildweite b_2 . Aus g_1 und b_2 folgt als Mittelwert der (genauere) Wert für die Gegenstandsweite g . Man berechne dann aus diesem Wert mit Gleichung (2) die Bildweite b und schließlich aus g und b nach Gleichung (1) die Brennweite f .

Die Bestimmung von f wird für 5 verschiedene Abstände s vorgenommen. Man bilde aus den 5 Werten von f den Mittelwert.

Graphische Prüfung

Auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems werden die Gegenstandsweiten g , auf der Ordinatenachse die Bildweiten b aufgetragen und je zwei zusammenhängende g - und b -Werte durch eine Gerade verbunden.

Laufen alle Geraden durch einen Punkt, so dass die Geraden eine Geradenschar bilden, fällt man von dem Schnittpunkt das Lot auf die Koordinatenachsen und bestimmt die Achsenabschnitte, die beide gleich f sein müssen (Beweis?!)

4.2 Bestimmung der Brennweite einer Zerstreuungslinse

Man kombiniere die Sammellinse bekannter Brennweite f_1 mit der Zerstreuungslinse (unbekannter Brennweite f_2) und überprüfe, ob das Linsensystem eine sammelnde Wirkung hat. Man lege wiederum eine konstante Entfernung s zwischen Gegenstand und Schirm fest und erzeuge ein vergrößertes und ein verkleinertes Bild. Man bestimme den Abstand e zwischen den beiden Linsenstellungen ohne dabei das Linsensystem zu drehen und berechne nach der Bessel-

Bleichung (6) die Brennweite $f_{1,2}$ des Systems.

Der Versuch wird für 5 verschiedene Abstände s ausgeführt und aus den 5 Werten für $f_{1,2}$ der Mittelwert gebildet. Aus f_1 und dem Mittelwerten von $f_{1,2}$ berechne man schließlich nach Gl. (7) die Brennweite der Zerstreuungslinse.

Der Abstand t zwischen den beiden (dünnen) Linsen wird mit einer Schiebellehre direkt am Linsensystem gemessen.

Anhand der Gleichung (9) soll die Lage der Hauptebene des Linsensystems berechnet und das Ergebnis diskutiert werden.

5. Fehlerrechnung

5.1 Brennweite der Sammellinse

Man bestimme aus den 5 Messwerten für f die Messunsicherheit (Standardabweichung des Mittelwertes).

5.2 Brennweite der Zerstreuungslinse

Man bestimme aus den 5 Messungen von $f_{1,2}$ die Messunsicherheit. Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz wird aus den Fehlern der Linsencombination sowie der Bestimmung des Anstandes t zwischen den zwei Linsen ($\pm 1\text{ mm}$) der absolute und der relative Größtfehler für die Brennweite der Zerstreuungslinse berechnet.

6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche Arten sphärischer Linsen kennen Sie?
- 2) Wie lautet die *Abbildungsgleichung* für dünne symmetrische Linsen?
- 3) Wann erzeugt eine dünne bikonvexe Linse ein reelles vergrößertes Bild, wann ein verkleinertes, wann ein gleich großes?
- 4) Zeichnen Sie den Strahlengang nach der geometrischen Strahlenoptik, wenn eine Linse als *Lupe* arbeitet.
- 5) Was für ein Bild entsteht bei einer Lupe?
- 6) Wie funktioniert das *Bessel-Verfahren*? Wie lautet die *Bessel-Gleichung*?
- 7) Warum muss beim Bessel-Verfahren der Abstand Gegenstand - Bild (Schirm) größer sein als die vierfache Brennweite der verwendeten Sammel-

linse?

- 8) Was für Bilder entwirft eine symmetrische, dünne Zerstreuungslinse?
- 9) Wohin wandert der Bildort, d.h. wie groß wird die Bildweite einer symmetrischen, dünnen Zerstreuungslinse, wenn die Gegenstandsweite unendlich wird?
- 10) Was versteht man unter dem Begriff *Hauptebene*?
- 11) Wie lautet die Gleichung für die Brennweite eines Linsensystems, bei dem der Abstand der Hauptebenen t beträgt?
- 12) Wieso ergibt sich aus der geometrischen Auftragung $g(b)$ nach Aufgabe 2 aus dem Schnittpunkt der Geradenscharen die Brennweite f ?