Versuch A 8: Trägheitsmoment und Steinerscher Satz

1. Literatur: Walcher, Praktikum der Physik
Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Physik, Bd.I
Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik

Stichworte: Drehmoment, Richtmoment, Trägheitsmoment, Hookesches Gesetz, Harmonischer Oszillator, Steinerscher Satz, Schwerpunktbestimmung.

2. Grundlagen

2.1 Trägheitsmoment

Einen räumlich ausgedehnten Körper beliebiger Form, dessen Größe und Gestalt sich durch äußere Einwirkungen nicht ändert, bezeichnet man in der Mechanik als *starren Körper*. Einen starren Körper kann man sich aufgebaut denken aus kleinen Teilbereichen, sog. *Massenelementen*. Die Massenelemente können so klein gewählt werden, dass man auf sie die für *Massenpunkte* gültigen Gesetze anwenden kann. Die für den ausgedehnten, starren Körper geltenden Gesetze erhält man dann durch Summation (Integration) über das gesamte Volumen.

Ein starrer Körper kann Translations- und/oder Rotationsbewegungen erfahren. Für die Translationsbewegung kann man sich die Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt vereint denken. Die Translationsbewegung des Schwerpunktes unterscheidet sich dann nicht von der Bewegung eines punktförmigen Körpers. Um einem Massenpunkt eine gewisse Beschleunigung $\underline{a}$ zu erteilen, ist eine der Masse m proportionale Kraft $\underline{F}$ erforderlich:

$$\underline{F} = m\underline{a} \qquad (1)$$

In analoger Weise bewirkt ein Drehmoment $\underline{M}$ um eine gewisse Drehachse die Beschleunigung der Rotation eines starren Körpers um diese Achse. Ist $\dot{\underline{\omega}}$ die Winkelbeschleunigung und I das sog. *Trägheitsmoment* des Körpers, so gilt:

$$\underline{M} = I\,\dot{\underline{\omega}} \qquad (2)$$

Man sieht, dass der Masse bei der Linearbewegung das Trägheitsmoment I bei der Drehbewegung entspricht. Für einen starren Körper hängt die Größe I von der

Gesamtmasse, der Geometrie des Körpers, sowie auch von der Lage und Richtung der betrachteten Drehachse ab.

Das Trägheitsmoment I eines bliebigen, starren Körpers lässt sich folgendermaßen berechnen (siehe Abb. 1):

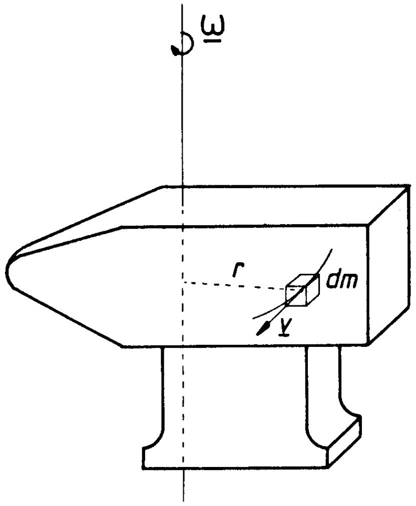

Abb.1:

Rotierender, starrer Körper

Der Körper drehe sich um eine vorgegebene Achse unter der Wirkung eines Drehmoments $\underline{M}$ mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$. Es sei dm ein Massenelement des Körpers im Abstand r senkrecht zur Drehachse. Für das Massenelement gelten dann die Gesetze für die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn. U.a. ist seine Bahngeschwindigkeit $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$, seine Bahnbeschleunigung $\dot{\underline{v}} = \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}$. Der die Winkelbeschleunigung $\dot{\underline{\omega}}$ bewirkende Anteil der Kraft auf das Massenelement ist $d\underline{F}_\varphi = \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}\,dm$, das entsprechende elementare Drehmoment $d\underline{M} = \underline{r} \times d\underline{F}_\varphi = \underline{r} \times \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}\,dm = \dot{\underline{\omega}}\,r^2\,dm$.

Das Gesamtdrehmoment $\underline{M}$ ergibt sich aus der Summe aller elementaren Drehmomente $d\underline{M}$ und beträgt:

$$\underline{M} = \int d\underline{M} = \dot{\underline{\omega}} \int r^2 dm \quad \text{bzw.} \quad \underline{M} = \dot{\underline{\omega}} \int r^2 \rho\, dV \qquad (3)$$

wobei die Integration sich über die Gesamtmasse M bzw. das Gesamtvolumen V erstreckt (ρ = Dichte des Körpers). Der Vergleich mit Gl. (2) liefert:

$$I = \int_M r^2 dm \quad \text{bzw.} \quad I = \int_V r^2 \rho dV \tag{4}$$

In Analogie zur kinetischen Energie bei einer Translationsbewegung: $E_{kin} = ½mv^2$ lässt sich die kinetische Energie eines mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ kreisenden Massenelements dm berechnen zu:

$$dE_{kin} = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm \tag{5}$$

Die gesamte kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers ist dann:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{6}$$

2.2 Beispiele zur Berechnung von Trägheitsmomenten

Als Drehachse wird jeweils eine Symmetrieachse gewählt. Die betrachteten Körper sollen eine homogene Massenverteilung, d.h. eine räumlich konstante Dichte ρ besitzen.

Hohlzylinder

Es seien R_1 der Innenradius, R_2 der Außenradius und D die Länge des Zylinders (in x-Richtung, s. Abb. 2). Für das Massenelement gilt: $dm = \rho\, dV = \rho\, dx\, r\, d\varphi\, dr$. Aus Gleichung (4) folgt dann für den Hohlzylinder:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^D dx \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho r\, dr = \frac{1}{2} \pi \rho D (R_2^4 - R_1^4) \tag{7}$$

Die Gesamtmasse des Zylinders beträgt: $m = \rho V = \pi \rho D (R_2^2 - R_1^2)$, so dass

$$I = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2) \tag{8}$$

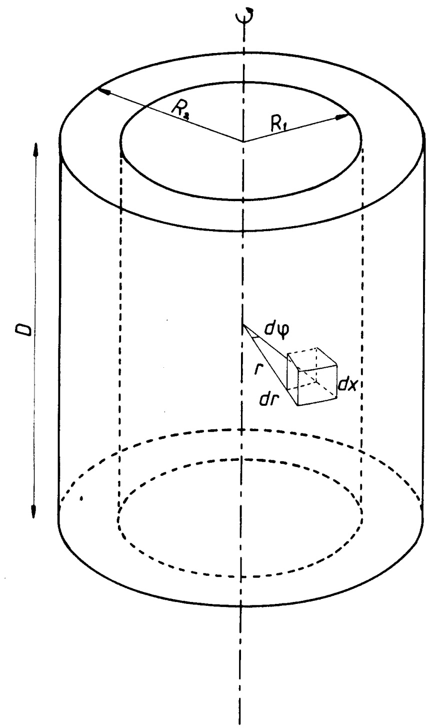

Abb.2:

Hohlzylinder

Vollzylinder oder Kreisscheibe

Man setzt in Gl.(8) $R_1 = 0$ und $R_2 = R$ und erhält:

$$I = \frac{1}{2} m R^2 \tag{9}$$

Kugel

Wählt man gem. Abb. 3 Kugelkoordinaten, dann ergibt sich für das Massenelement: $dm = \rho\, d\varphi\, \sin\theta\, d\theta\, r^2 dr$; dessen Abstand a zur Drehachse beträgt $r \sin\theta$. Damit ist

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^R r^4 \rho\, dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 \tag{10}$$

Die Gesamtmasse beträgt: $m = 4\pi R^3\rho/3$ und damit das Trägheitsmoment:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \tag{11}$$

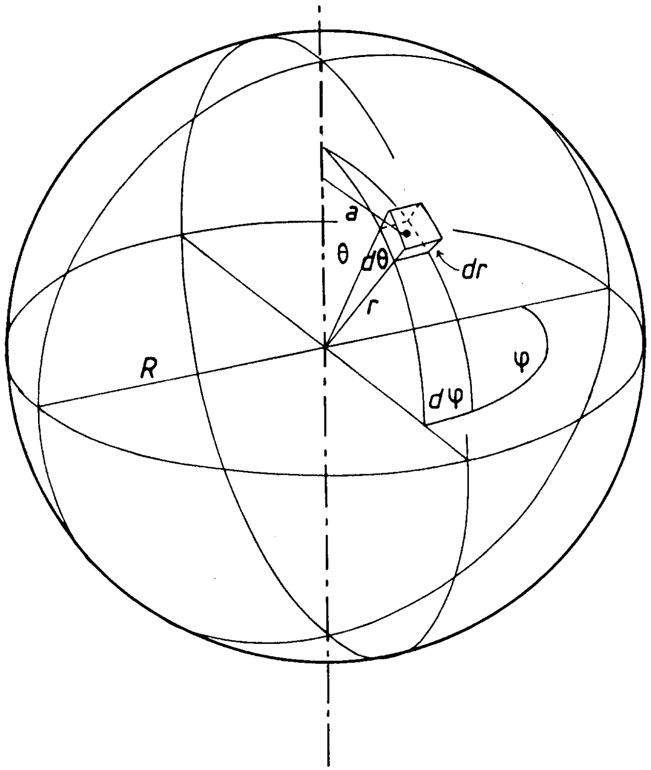

Abb.3: Kugel

2.3 Steinerscher Satz

Im allgemeinen hängt das Trägheitsmoment I eines starren Körpers von der Lage der gewählten Drehachse ab. Wenn jedoch das Trägheitsmoment I_S bezüglich einer Achse, die durch den Schwerpunkt geht, bekannt ist, so kann der Wert des Trägheitsmoments I_A bezüglich einer beliebigen, dazu parallelen Achse mit Hilfe des Steinerschen Satzes leicht berechnet werden. Wenn d der senkrechte Abstand

zwischen der Drehachse A und dem Schwerpunkt S ist, dann ist das Trägheitsmoments I_A gegeben durch:

$$I_A = I_S + md^2 \tag{12}$$

wobei m die Masse des Körpers ist. Diese Beziehung wird mit Hilfe von Abb. 4 hergeleitet.

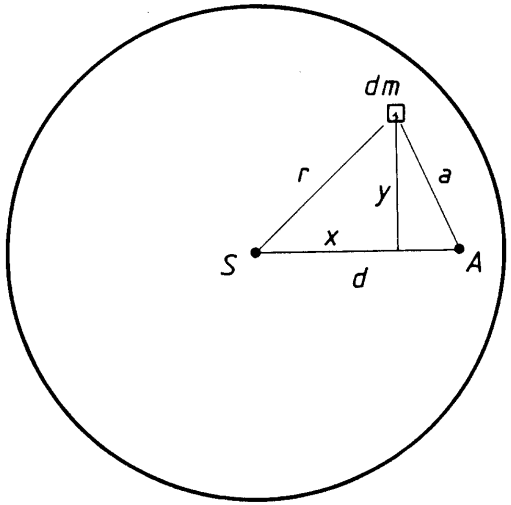

Abb.4:

Zur Herleitung
des Satzes von Steiner

Es sei S der Schwerpunkt des Körpers und gleichzeitig Nullpunkt des gewählten Koordinationssystems, A sei die Projektion der betrachtenden Rotationsachse A. Ein Massenelement dm befinde sich im Abstand a zur Achse A und im Abstand r zur Achse S, die parallel zu A durch S läuft. x und y sind Hilfsvariablen. Es bestehen die Beziehungen $a^2 = y^2 + (d-x)^2$ und $r^2 = x^2 + y^2$, bzw. $a^2 = r^2 + d^2 - 2xd$. Das Trägheitsmoment bezüglich A lässt sich dann schreiben als:

$$I_A = \int_V a^2 dm = \int_V r^2 dm + \int_V d^2 dm - 2\int_V x\, d\, dm \tag{13}$$

Die ersten zwei Glieder entsprechen I_S, bzw. m d^2. Definitionsgemäß erhalten wir $\int x\, dm = 0$, da man den Schwerpunkt als Bezugspunkt gewählt hat. Damit sind Gl.

(13) und Gl. (12) identisch, womit der Steinersche Satz bewiesen ist.

2.4 Messmethode zur Bestimmung von Trägheitsmomenten

Da Winkelbeschleunigungen experimentell relativ schwierig zu bestimmen sind, benutzt man zur Bestimmung von I meist Schwingungsverfahren, da sich die Periodendauer einer Schwingung genauer ermitteln lässt. Man verwendet im Experiment einen Drehtisch, der aus einer vertikal gelagerten Drehachse und einer Spiralfeder besteht. Wird der Drehtisch um den Winkel φ aus seiner Ruhelage ausgelenkt, so bewirkt die Spiralfeder ein rücktreibendes Drehmoment $M = -D\varphi$. D heißt *Richtgröße* oder im vorliegenden Falle *Federrichtgröße*. Lässt man jetzt den Drehtisch frei, so erfährt dieser eine Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2$, gemäß $M = I\, d^2\varphi/dt^2$ (Gl.1). Die differentielle Bewegungsgleichung lautet somit (s. auch Versuch A4):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I}\varphi = 0 \qquad (14)$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie die Bewegungsgleichung für ein Federpendel (harmonischer Oszillator). Sie hat daher die Lösung:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(2\pi\nu t + \alpha) \qquad (15)$$

wobei φ_0 die Amplitude und α der Phasenwinkel der (harmonischen) Bewegung ist. Die Frequenz ν der periodischen Bewegung ist gegeben durch:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{I}} \qquad (16)$$

Ist die Federrichtgröße D bekannt, so folgt aus Gl. (16), da die Periode $T = 1/\nu$, der Wert des Trägheitsmoments I zu:

$$I = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 D \qquad (17)$$

Die Einheit des Trägheitsmoments ist 1 kg m^2.

In der Praxis ist die Kenntnis von Trägheitsmomenten bei der Entwicklung aller

Maschinen wichtig, in denen mechanische Teile Rotationsbeschleunigungen ausgesetzt sind, z.B. im Motorenbau. Die Anwendung des Steinerschen Satzes ermöglicht die Berechnung von I auch für komplizierte Bauteile, da man diese stets in einfache Teilkörper aufteilen kann, deren Trägheitsmomente dann bezüglich einer Symmetrieachse leicht berechenbar sind.

3. Aufgabenstellung

1. Aufgabe: Aus der Messung der Periodendauer von Drehschwingungen sollen die Trägheitsmomente einer Kreisscheibe, eines Hohlzylinders, eines Vollzylinders und einer Kugel bestimmt werden. Dazu ist zunächst die Richtgröße D des verwendeten Drehtisches zu bestimmen.

2. Aufgabe: Der Steinersche Satz soll für eine Scheibe überprüft werden.

4. Versuchsdurchführung

4.1 Erste Aufgabe

Als erstes ist die Federrichtgröße D des Drehtisches zu bestimmen. Dazu wird am oberen Ende der Drillachse und zwar rechtwinklig zu ihr, ein Stab befestigt. In zwei verschiedenen zu messenden Abständen r von der Drehachse und in beiden Drehrichtungen wird dann eine Kraft senkrecht zum Stab mit Hilfe einer Federwaage ausgeübt. Die Auslenkungen sollen dabei π bzw. 2π betragen. Die Abstände r sind so zu wählen, dass bei entsprechender Auslenkung die Kraft so groß wird, dass die obere Hälfte des Messbereiches des Kraftmessers erreicht wird (höhere Genauigkeit).

Die starren Körper, deren Trägheitsmomente bestimmt werden sollen, werden gewogen und abgemessen. Die Ansatzstücke, die zur Befestigung der Körper auf der Achse benutzt werden, sind ebenfalls zu wiegen.
Die experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente erfolgt durch die Periodenmessung der Drehschwingungen der Versuchskörper auf dem Drehtisch. Dafür wird eine Ausgangsauslenkung gewählt, die weder zu groß (im elastischen Bereich der Feder), noch zu klein (wegen der Genauigkeit der Nulldurchgangsbestimmung) sein sollte. Die Zeit für 10 Schwingungen wird gemessen, und diese Messung 5 Mal für jeden Körper wiederholt, wobei der Körper jeweils um ca. 360°/5 = 72° (Augenmaß genügt) auf der Drillachse versetzt wird. Die Trägheitsmomente der Aufsatzstücke sind zu klein, um mit dieser Methode bestimmt werden zu können, und sind daher aus der im Praktikum vorhandenen

Tabelle zu entnehmen.

4.2 Zweite Aufgabe

Zunächst wird das Trägheitsmoment der Kreisscheibe (mit mehreren Achsenlöchern) bezüglich der Symmetrieachse wie in der ersten Aufgabe bestimmt. Anschließend wird die Schwingungsdauer der Scheibe für Drehachsen durch alle vorhandenen exzentrischen Achsenlöcher aus je 10 Schwingungen ermittelt. Jede dieser Messungen ist doppelt durchzuführen, wobei beim zweiten Mal die Scheibe um π auf der Achse versetzt festgeschraubt wird (warum?).

In der Auswertung müssen die Beiträge der Löcher zum Trägheitsmoment berücksichtigt werden. Aus diesem Grund sollen sowohl der Durchmesser der Löcher als auch ihr Abstand zur Scheibenmitte mit der Schieblehre gemessen werden.

5. Auswertung

Zur Bestimmung der Federrichtgröße wird der Mittelwert aus den acht Kombinationen von Kräften, Abständen und Drehrichtungen gebildet.

Für jeden Teilversuch der ersten Aufgabe ist die Schwingungsdauer aus dem Mittelwert von 10 Perioden zu bestimmen. Daraus ergibt sich das Gesamtträgheitsmoment von Körper, Aufsatzstück und Drillachse gem. Gl.(17). Da I eine additive Größe ist, wird der gesuchte I-Wert des jeweiligen starren Körpers durch einfache Subtraktion der in der Tabelle zu findenden Werte für die Aufsatzstücke berechnet.

Zur Auswertung der zweiten Aufgabe trage man die gemessenen Gesamtträgheitsmomente als Funktion des Abstandsquadrats auf. Es sollte sich dabei eine Gerade ergeben, deren Steigung die Masse der Scheibe und deren Ordinatenabschnitt dem Gesamtträgheitsmoment bezüglich der Schwerpunktachse entspricht. Es gilt insgesamt:

$$I(d) = I_S + I_z + m d^2$$

wobei I_s das Trägheitsmoment der Scheibe (unter Berücksichtigung der Löcher) und I_z die Summe der Trägheitsmomente der verschiedenen Zusätze (Montagematerial - siehe Tabelle) sind. Dieses wird überprüft, indem man (bei möglichst großem Maßstab der Zeichnung) eine Ausgleichsgerade durch die experimentellen Punkte legt, die Steigung und den Ordinatenabschnitt d ermittelt und diese Werte mit den entsprechend berechneten Werten vergleicht.

Fehlerdiskussion

Der Fehler in den Massenbestimmungen beträgt etwa $\pm$ 0.1 g, der für die Zeitmessungen $\pm$ 0.5 s. Der Fehler der Messungen mit dem Maßband beträgt $\pm$ 0.5 mm, der mit der Schieblehre $\pm$ 0.2 mm. Mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes soll der Fehler für die Trägheitsmomente abgeschätzt werden. Die experimentell bestimmten Werte sind mit den berechneten Werten zu vergleichen und die evtl. vorhandenen Abweichungen zu diskutieren.

6. Fragen zur Selbstkontrolle

1) Was versteht man unter dem Begriff *Drehmoment*?

2) Vergleiche Geschwindigkeit, Beschleunigung und kinetische Energie von Linear- und Drehbewegung eines Massenpunktes.

3) Was versteht man unter *Drehimpuls*?

4) Wie lautet die Differentialgleichung für die Schwingung eines harmonischen Oszillators, wie ihre Lösung?

5) Worin besteht der Unterschied zwischen der Bewegungsgleichung eines Schwerependels und eines Drehpendels?

6) Schwungräder dienen als Energiespeicher. Was ist die optimale Form eines Rads für ein gegebenes Gewicht?

7) Welchen Einfluss hat die Luftreibung auf die I-Werte, die mit dem Schwingungsverfahren gewonnen werden?

8) Warum ist eine Auslenkung von 2π bei der Bestimmung der Federrichtgröße D günstig?

9) Wie sind die Koordinaten des Schwerpunkts eines starren Körpers bezüglich eines beliebigen Koordinatensystems definiert?