

## Versuch A 5: Pohlsches Drehpendel

**1. Literatur:** Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. I: Mechanik  
Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik  
Pohl, Einführung in die Physik, 1. Bd.: Mechanik  
Walcher, Praktikum der Physik

**Stichworte:** Pendelbewegung; Schwingung, harmonisch, frei, erzwungen, ungedämpft, gedämpft; Wirbelstrombremse; Resonanz; Phasenraum; Fouriertransformation; anharmonische und chaotische Schwingungen

## 2. Grundlagen

### 2.1 Freie ungedämpfte Schwingung

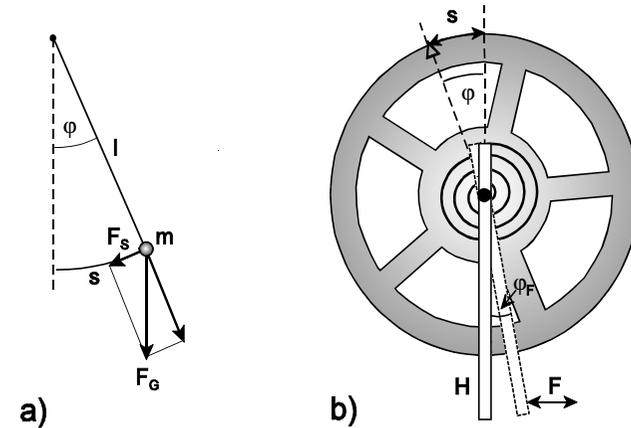
Wirkt auf einen beweglichen Körper, der aus seiner Ruhelage ausgelenkt wurde, lediglich eine der Auslenkung entgegen gerichtete und zu ihr proportionale Kraft, wird er eine *harmonische Schwingung* um seine Ruhelage ausüben, d.h. seine Auslenkung wird allgemein durch eine Linearkombination der Zeitfunktionen  $\sin(\omega t)$  und  $\cos(\omega t)$  beschrieben; es handelt sich um eine *freie ungedämpfte harmonische Schwingung*. Die Maximalauslenkung und Energie dieser Schwingung ist zeitlich konstant.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist das mathematische Schwebependel (Abb. 1a). Dieses Fadenpendel ist idealisiert, da seine Masse  $m$  punktförmig, der Faden mit Länge  $l$  dehnungsfrei und masselos und darüber hinaus die Aufhängung und Bewegung des Pendels als reibungsfrei angenommen wird. Ist die Bogenlänge  $s = l \varphi$  die Auslenkung der Masse  $m$ , wirkt aufgrund der Schwerkraft  $F_G$  die Kraft  $F_s = -m g \sin \varphi$  in Richtung der Auslenkung. Für kleine Winkel  $\varphi$  ist  $\sin \varphi \approx \varphi$ ;  $F_s \approx m g \varphi = m g s / l$ , so dass dann die Bewegungsgleichung des Pendels lautet:

$$m l \ddot{\varphi} + m g \varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{s} + \frac{g}{l} s = 0 \quad (1)$$

Die allg. Lösung dieser linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung für die zeitabhängige Auslenkung  $s(t)$  lautet:

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (2)$$



**Abb. 1:**

a) Mathematisches Pendel, b) Drehpendel nach Pohl

$s_0$  ist die Amplitude der Schwingung,  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0 = (g/l)^{1/2}$  die Kreisfrequenz,  $f_0$  die Frequenz,  $T_0$  die Schwingungsdauer und  $\alpha$  ein Phasenwinkel.  $s_0$  und  $\alpha$  sind durch die Anfangsbedingungen der Schwingung  $s(0)$  und  $\dot{s}(0)$  festgelegt.

### 2.2 Freie gedämpfte Schwingung

In makroskopischen, mechanischen Systemen kommen ungedämpfte Schwingungen selten vor. Eine reales Pendel erfährt während seiner Bewegung Reibungskräfte, z.B. bedingt durch die Reibung der Lager. Ein Beispiel für ein solches reales Pendel ist das in diesem Versuch eingesetzte Drehpendel nach Pohl (Abb. 1b). Eine runde Metallscheibe ist im Zentrum mit einer horizontal liegenden Drehachse gelagert. Mit der Drehachse verbunden ist das innere Ende einer um die Achse gewundenen Spiral-Blattfeder. Deren äußeres Ende ist an einem ebenfalls um die Achse drehbaren Hebel H befestigt. Wird bei festgehaltenem Hebel die Scheibe um einen (kleinen) Winkel  $\varphi$  aus der Ruhelage gedreht, bewirkt die dadurch erzeugte Spannung der Feder ein rücktreibendes Drehmoment  $M_D = -D\varphi$ .  $D$  ist die Winkelrichtgröße der Feder. Ist die Reibung des Pendels viskos, z.B. infolge der inneren Reibung des Ölfilms im Drehlager oder der Wirkung einer am Pendel montierten Wirbelstrombremse (s.u.), wirkt ein weiteres, die Bewegung hemmendes Drehmoment  $M_R = -R \dot{\varphi}$ . Die Bewegungsgleichung für  $\varphi$  bzw. die Auslenkung  $s = r \varphi$  des Pendels ( $r$  = Scheibenradius) lautet damit:

$$I \ddot{\varphi} + R \dot{\varphi} + D \varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{s} + 2\beta \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad (3)$$

I ist das Trägheitsmoment der Scheibe (s. Versuch A8, Trägheitsmomente),  $2\beta = R/I$  ein Reibungskoeffizient,  $\omega_0 = (D/I)^{1/2}$  die Kreisfrequenz der ungedämpften Pendelschwingung. Die Lösung der Dgl. (3) hat die Form:

$$s(t) = s_0 e^{\lambda t} \quad (4)$$

Einsetzen in Gl. (3) führt zur charakteristischen Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (5)$$

mit den Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (6)$$

Die allg. Lösung für die Pendelbewegung ist mit Gl. (4) und (6) die Linearkombination

$$s(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (7)$$

Werden die speziellen Anfangsbedingungen  $s(0) = s_0$  und  $\dot{s}(0) = 0$  gewählt, lautet die Lösung

$$s(t) = \frac{s_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \quad (8)$$

Zur Diskussion der Pendelbewegung werden drei Fälle mit unterschiedlichem  $\beta$  als Maß für die Stärke der Dämpfung betrachtet:

1.) Im Fall  $\beta > \omega_0$  sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beide reell und negativ. Die Bewegung ist stark gedämpft. Das Pendel schwingt nicht sondern bewegt sich monoton (und relativ langsam) aus der Anfangsposition in die Ruhelage. Man nennt dies den *Kriechfall* (s. Abb.2a).

2.) Im Fall  $\beta < \omega_0$  sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  komplex. Es liegt nur eine schwache Dämpfung, der *Schwingfall* vor (s. Abb. 2b). Mit  $\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ ,  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i \omega$  folgt:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 e^{-\beta t} \left( \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{\beta}{\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) \\ &= s_0 e^{-\beta t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Gl. (9) stellt eine Schwingung dar, deren Amplitude zeitlich exponentiell abnimmt. Aus den Nullstellen der zeitlichen Ableitung von  $s(t)$  erhält man die

$$\begin{aligned} \text{Maxima bei:} & \quad t = 2\pi n / \omega = n T, \\ \text{Minima bei:} & \quad t = 2\pi (n + 1/2) / \omega = (n + 1/2) T \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Der Faktor  $e^{-\beta t}$  in Gl. (9) ist die *Amplitudenfunktion* (s. Abb. 2c). Das Verhältnis zweier aufeinander folgenden Maxima der Schwingung wird *Dämpfungsverhältnis*  $k$  genannt,

$$k = \frac{s(t)}{s(t+T)} = e^{\beta T} \quad (10)$$

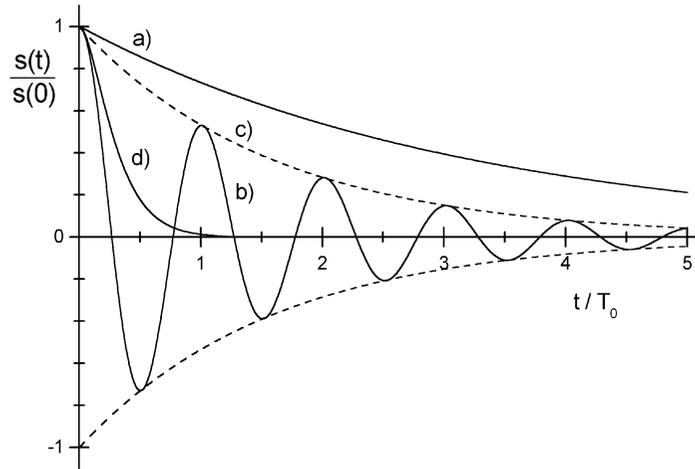
bzw.  $\beta T = \Lambda = \ln k$ , das *logarithmische Dämpfungsdekrement*. Das Verhältnis der Schwingungszeiten von gedämpfter und ungedämpfter Schwingung ist:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} = \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}} \quad (11)$$

In den meisten Fällen unterscheiden sich  $T$  und  $T_0$  nur wenig ( $< 1\%$ ).

3.) Der Fall  $\beta = \omega_0$  heißt *Aperiodischer Grenzfall*. Die Lösung für die Bewegung des Pendels ergibt sich durch Grenzwertbildung  $\omega \rightarrow 0$  aus Gl. (9):

$$s(t) = s_0 e^{-\beta t} (1 + \beta t) \quad (12)$$



**Abb. 2:** Gedämpfte Schwingung: a) Kriechfall,  $\beta \approx 10 \omega_0$  ;  
 b) Schwingfall,  $\beta \approx \omega_0 / 10$  ; c) Amplitudenfkt.  $\exp(-\beta t)$  für  
 Schwingfall; d) aperiodischer Grenzfall,  $\beta = \omega_0$

Im aperiodischen Grenzfall bewegt sich das Pendel bei gegebener Kreisfrequenz  $\omega_0$  ohne vor und zurück zu schwingen in der kürzesten Zeit ( $\Delta t \approx T_0$ ) von der Anfangsposition in die Ruhelage (s. Abb. 2d).

### 2.3 Erzwungene Schwingung

Betrachtet sei wieder das Drehpendel (Abb. 1b). Wird der Hebel, mit dem das Pendel über die Spiralfeder gekoppelt ist, durch eine zeitabhängige Kraft  $F(t)$  periodisch um den Winkel  $\varphi_F$  gedreht, wirkt auf das Pendel ein periodisches Drehmoment  $M_F = D\varphi_F(t)$ . Hat  $\varphi_F(t)$  die Zeitabhängigkeit  $\cos(\omega t)$  bzw. in komplexer Darstellung  $\exp(i\omega t)$ , lautet mit Gl. (3) die Bewegungsgleichung des Pendels

$$I \ddot{\varphi} + R \dot{\varphi} + D \varphi = D \varphi_F(t) = A \cos(\omega t) \tag{13}$$

bzw.  $\ddot{s} + 2\beta \dot{s} + \omega_0^2 s = a e^{i\omega t}$

Diese inhomogene Dgl. 2. Ordnung hat neben den zuvor diskutierten Lösungen der homogenen Dgl. (3) eine weitere, partikuläre Lösung, die der Zeitabhängigkeit des Erregers entspricht. Nach Abklingen der Eigenschwingung, Gl. (9), bzw. nach einer Einschwingzeit wird das Pendel mit der Kreisfrequenz  $\omega$  des Erregers schwingen. Mit dem Ansatz:

$$s(t) = s_\omega \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{bzw.} \quad s(t) = s_\omega e^{i(\omega t + \alpha)} \tag{14}$$

können aus Gl. (13) die Amplitude  $s_\omega$  der (stationären) Pendelschwingung und ihr Phasenwinkel  $\alpha$  relativ zur Erregerschwingung in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega$  bestimmt werden. Einsetzen von  $s$  und dessen zeitlichen Ableitungen in Gl. (13) liefert nach Division durch  $s$

$$Z = -\omega^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2 = \frac{a}{s_\omega} e^{-i\alpha} \tag{15}$$

bzw. getrennt in Real- und Imaginärteil sowie Betragsquadrat von  $Z$ :

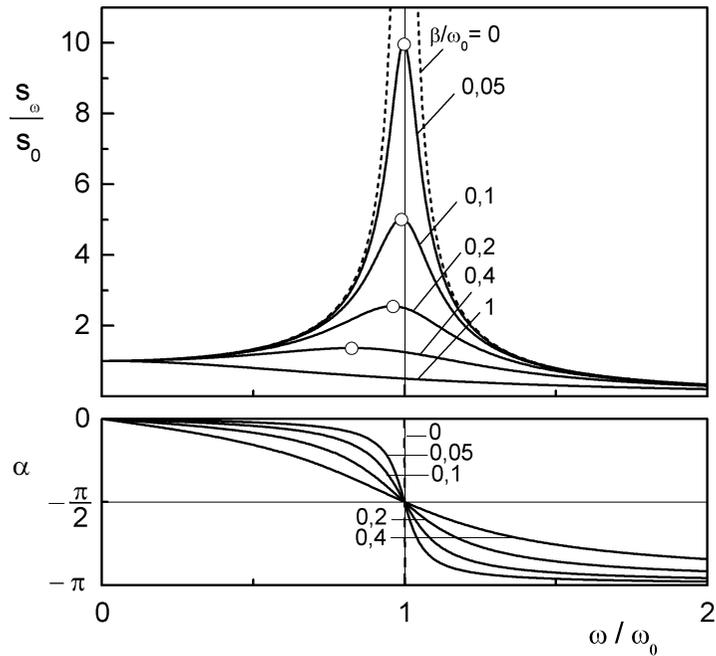
$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 &= \frac{a}{s_\omega} \cos \alpha, & 2\beta\omega &= -\frac{a}{s_\omega} \sin \alpha, \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 &= \frac{a^2}{s_\omega^2} \end{aligned} \tag{16}$$

und damit

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right), \quad \frac{s_\omega}{s_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{17}$$

mit  $s_0 = s_\omega(\omega=0) = a / \omega_0^2$ .

Abb. 3 zeigt die auf  $s_0$  normierte Amplitude  $s_\omega$  der erzwungenen Schwingung sowie den Phasenwinkel  $\alpha$  als Funktion der auf  $\omega_0$  normierten Kreisfrequenz  $\omega$  der Erregerschwingung für verschiedene Dämpfungsgrade  $\beta/\omega_0$ . Die Amplitude der ungedämpften Schwingung ( $\beta = 0$ ) divergiert an der *Resonanzstelle*  $\omega = \omega_0$ . Mit anwachsender Dämpfung nimmt das Resonanzmaximum von  $s_\omega$  ab und verschiebt sich zu Frequenzen  $\omega_{\max} < \omega_0$ :



**Abb. 3:** Rel. Amplitude  $s_\omega/s_0$  und Phase  $\alpha$  der erzwungenen Schwingung vs. Kreisfrequenz  $\omega$  der Erregerschwingung für verschiedene Dämpfungsgrade  $\beta/\omega_0$ ;  $\omega_0$  = Kreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung.  $\circ$  = Resonanzmaxima

$$\frac{s_{\max}}{s_0} = \frac{1}{2 \frac{\beta}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}}, \quad \omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2 \left( \frac{\beta}{\omega_0} \right)^2} \quad (18)$$

Der Phasenwinkel  $\alpha$  der ungedämpften Schwingung springt mit steigendem  $\omega$  an der Resonanzstelle  $\omega = \omega_0$  von 0 auf  $-\pi$ . Bei der gedämpften Schwingung ist der Abfall von 0 auf  $-\pi$  stetig und mit wachsender Dämpfung  $\beta$  bei  $\omega = \omega_0$  zunehmend flacher. Unabhängig von  $\beta$  ist  $\alpha(\omega_0) = -\pi/2$ .

## 2.4 Anharmonische Schwingungen

### 2.4.1 Geringe Anharmonizität

Voraussetzung für die Ausbildung harmonischer Schwingungen eines mechanischen schwingfähigen Systems ist die Proportionalität von Auslenkung und rücktreibender Kraft. Diese ist in den zuvor diskutierten Beispielen Fadenpendel und Drehpendel nur bei kleinen Auslenkungen gegeben.

Bei großer Auslenkung des Fadenpendels ist  $\sin\varphi$  nicht mehr proportional zu  $\varphi$ , wie in Gl. (1) angenommen. Das rücktreibende Drehmoment  $M_D$  des hier verwendeten Drehpendels zeigt mit größer werdender Auslenkung ebenfalls kein zu  $\varphi$  proportionales Anwachsen mehr. Es wird vielmehr der Zusammenhang  $M_D(\varphi) = D_0\varphi + D_1\varphi^3$  beobachtet. Entsprechend ist eine am Rand der Pendelscheibe angreifende Tangentialkraft  $F$ , welche die (statische) Auslenkung  $s$  bewirkt:

$$F(s) = \delta_0 s + \delta_1 s^3 = \delta_0 (s + \delta s^3) \quad (19)$$

Für eine freie ungedämpfte Schwingung des Pendels lautet damit analog zu Gl. (3) die Bewegungsgleichung

$$\ddot{s} + \omega_0^2 (s + \delta s^3) = 0 \quad (20)$$

Zur näherungsweisen Lösung dieser nichtlinearen Dgl. wird im Fall schwacher Anharmonizität, d.h. für  $\delta s^3 \ll s$ , angenommen, dass die Eigenschwingung des Pendels im wesentlichen noch die Form der harmonischen Schwingung hat, d.h.  $s = s_0 \cos(\omega t)$ , dass aber die Frequenz  $\omega$  von der Eigenfrequenz  $\omega_0$  des harmonischen ungedämpften Pendels abweicht.

Mit dem Lösungsansatz  $s = s_0 \cos(\omega t)$  folgt aus Gl. (20) mit der Näherung:  $\cos^3(\omega t) \approx \frac{3}{4} \cos(\omega t)$ ,  $\delta s^3 = \frac{3}{4} \delta s_0^2 s$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \delta s_0^2 \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{3}{8} \delta s_0^2 \quad (21)$$

Dies bedeutet, dass mit steigender Auslenkung  $s_0$  die Kreisfrequenz  $\omega$  der freien ungedämpften Schwingung anwächst. Dieses Anwachsen von  $\omega$  ist für das im Versuch benutzte Pendel schon bei mittlerer Auslenkung größer als die Abnahme von  $\omega$  infolge der Dämpfung (Gl. (11)).

Für die gedämpfte erzwungene Schwingung des Pendels gilt entsprechend Gl. (13) bei größerer Auslenkung die Dgl.

$$\ddot{s} + 2\beta\dot{s} + \omega_0^2(s + \delta s^3) = a e^{i\omega t} \quad (22)$$

Unter der Bedingung schwacher Anharmonizität kann wie zuvor  $\delta s^3$  näherungsweise durch  $\frac{3}{4} \delta s_0^2 s$  ersetzt werden. Die Berechnung der Lösung erfolgt wie bei der harmonischen Schwingung, Gln. (13 - 17). Die (für s implizite) Lösung  $\omega_r(s_r)$  lautet

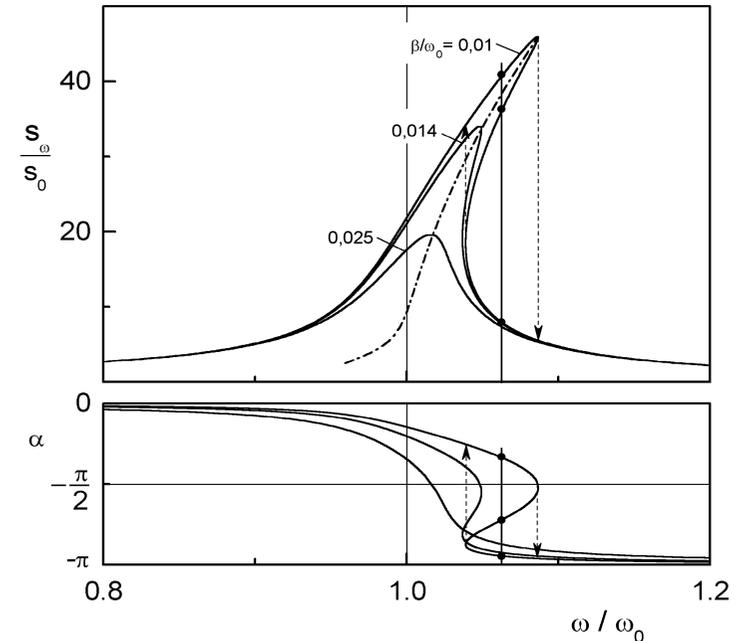
$$\omega_{r1,2}^2 = 1 + c s_r^2 - 2\beta_r^2 \pm \sqrt{4\beta_r^2(\beta_r^2 - (1 + c s_r^2)) - s_r^{-2}} \quad (23)$$

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{2\beta_r \omega_r}{1 + c s_r^2 - \omega_r^2}\right)$$

Hierbei sind der Übersichtlichkeit halber reduzierte Größen gewählt worden:  
 $\omega_r = \omega/\omega_0$ ,  $c = \frac{3}{4} \delta s_0^2$ ,  $s_r = s_\omega/s_0$ ,  $\beta_r = \beta/\omega_0$ .

Abb. 4 zeigt graphisch das Ergebnis für die anharmonische Resonanz, Gl. (23), ähnlich wie Abb. 3 für den harmonischen Fall. Man beachte jedoch die unterschiedlichen Wertebereiche von  $s_\omega$  und  $\omega$ !

Wie schon die Gl. (21) vermuten lässt, verschiebt sich die Resonanz bei großer Auslenkung s zu größeren Frequenzen, was die „Schräglage“ der Resonanzkurven in Abb. 4 verursacht. Bei genügend geringer Dämpfung  $\beta$  erfüllen deshalb in einem begrenzten Frequenzbereich  $\omega > \omega_0$  bei gegebener Kreisfrequenz  $\omega$  gleich drei verschiedene Auslenkungen  $s_\omega$  mit verschiedenen Phasen  $\alpha$  die Dgl. (22), die mittlere ist jedoch instabil und wird nicht beobachtet. Wird das Pendel mit steigender Frequenz  $\omega$  betrieben, wird die große Auslenkung beobachtet, bis die Frequenz mit der Maximalauslenkung überschritten wird. Dann ändert das Pendel sprunghaft seine Phasenlage (Abwärts Pfeil in Abb. 4) und zeigt nur noch die kleine Auslenkung. Diese bleibt auch bei anschließender Reduzierung der Frequenz stabil, bis der Frequenzbereich mit der Mehrfachlösung  $s_\omega(\omega)$  unterschritten wird. Dann springt das Pendel wieder in den Bewegungszustand mit der größeren Auslenkung zurück (Aufwärts Pfeil). Beim Durchfahren der Resonanz zeigt das gering bedämpfte Pendel Hysterese. Sein Bewegungszustand  $s_\omega(\omega)$  hängt in einem begrenzten Frequenzbereich vom zeitlich zuvor durchlaufenen ab.



**Abb. 4:** Rel. Amplitude  $s_\omega/s_0$  und Phase  $\alpha$  der erzwungenen anharmonischen Schwingung vs. rel. Kreisfrequenz  $\omega/\omega_0$  der Erregerschwingung für verschiedene Dämpfungsgrade  $\beta/\omega_0$ ;  $\omega_0$  = Kreisfrequenz der freien ungedämpften harmonischen Schwingung. - - - -: Lage der Resonanzmaxima

### 2.4.2 Starke Anharmonizität

Die Bewegung des Drehpendels lässt sich durch die Montage zusätzlicher Massen an der Pendelscheibe drastisch verändern. Wird ein Massestück  $m$  im Radius  $r_m$  von der Drehachse entfernt an der Zeigerposition des Pendels befestigt, wirkt bei seiner Auslenkung neben dem rücktreibenden Moment  $M_D$  ein zusätzliches Drehmoment  $M_m = F_s r_m = m g r_m \sin \varphi$  (s. Abb. 5). Solange die Masse  $m$  klein genug ist, so dass das gesamte Drehmoment  $M = M_D + M_m < 0$ , d.h. noch rücktreibend ist, bleibt die Ruhelage ( $\varphi=0$ ) des Pendels stabil.

Für Auslenkungen  $-\pi < \varphi = s / r < \pi$  kann  $\sin \varphi$  durch  $\varphi - \varphi^3/8$  angenähert werden. Für das gesamte Drehmoment ergibt sich dann

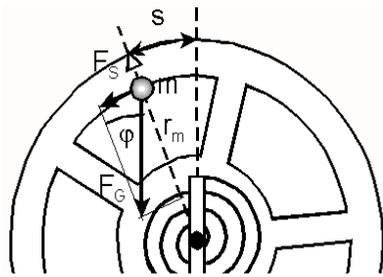


Abb. 5:

Drehmoment  $M_m = F_s r_m$   
auf das Drehpendel  
infolge der Zusatzmasse  $m$

$$M = M_D + M_m = -D_0' \varphi - D_1' \varphi^3 \quad (24)$$

$$D_0' = D_0 - mgr_m, \quad D_1' = D_1 + \frac{mgr_m}{8}$$

Dies bedeutet, dass infolge einer geringen Masse  $m$  lediglich die Kreisfrequenz der ungedämpften Pendelschwingung  $\omega_0 = (D_0 / I)^{1/2}$  abnimmt und die zuvor diskutierte Anharmonizität ( $D_1$ ) der Schwingung anwächst.

Ist jedoch die Masse  $m > D_0 / g r_m$ , wird  $D_0'$  negativ und damit die Ruhelage des Pendels bei  $s = 0$  instabil. Das Pendel findet ein neues Gleichgewicht bei endlicher positiver oder negativer Auslenkung  $s$ .

Zur Diskussion der freien Schwingung eines solchen Pendels wird ihre Energie  $E$  als Summe von potenzieller und kinetischer Energie in Abhängigkeit von der Auslenkung  $s$  betrachtet.

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} D_0' \varphi^2 + \frac{1}{4} D_1' \varphi^4 \quad (25)$$

$$= \frac{1}{2r^2} v^2 + \frac{1}{2} \delta_0' s^2 + \frac{1}{4} \delta_1' s^4$$

Abb. 6a zeigt oben schematisch die potenzielle Energie  $E_{\text{pot}}(s)$  für die harmonische bzw. schwach anharmonische Schwingung, bei der in Gl. (25)  $\delta_0' > 0$  und der Term  $\sim s^4$  klein im Vergleich zu dem  $\sim s^2$  ist. In der Mitte zeigt Abb. 6a das *Phasenraumdiagramm*  $v(s)$  für den Fall der freien ungedämpften Schwingung. Die Linien im  $v(s)$ -Diagramm, sog. *Trajektorien*, beschreiben die zeitliche

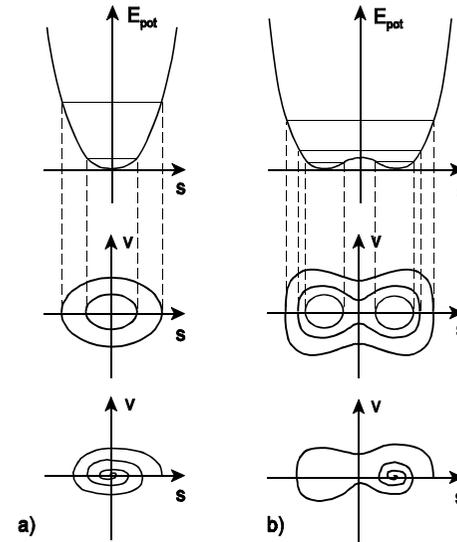


Abb. 6:

Potenzielle Energie (oben),  
Phasenraumdiagramme der  
ungedämpften Schwingung  
(Mitte) und der gedämpften  
Schwingung (unten) für  
a) harmonisches oder leicht  
anharmonisches,  
b) stark anharmonisches  
Potential

Abfolge aller Bewegungszustände  $(s(t), v(t))$ , die das Pendel durchläuft.

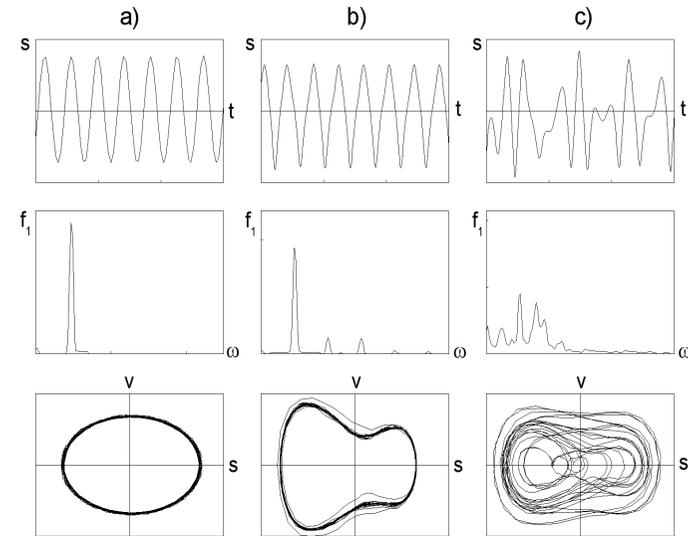
Geht keine Energie durch Reibung bzw. Dämpfung verloren ( $E = \text{const.}$ ), sind die Schwingungen periodisch und die Trajektorien in sich geschlossene Kurven (Ellipsen für harmonische Schwingungen). Für den Fall mit Dämpfung (Abb. 6a, unten) sind die Trajektorien Spiralen, sie enden in der Gleichgewichtslage (Potentialminimum).

Abb. 6b zeigt oben das stark anharmonische Potenzial mit zwei Minima an den Gleichgewichtslagen des Pendels für den Fall, dass aufgrund der Zusatzmasse  $m$  in Gl. (25)  $D_0'$  bzw.  $\delta_0' < 0$  ist. Wenn bei fehlender Dämpfung die Gesamtenergie der Pendelschwingung größer ist als die Differenz der potenziellen Energie bei der Position  $s = 0$  und denen der Minima, liegen die Trajektorien der freien Schwingungen symmetrisch um die Position  $s = 0$ ; andernfalls sind die Schwingungen jeweils auf die Umgebung eines Potentialminimums beschränkt (Abb. 6b, Mitte). Tritt Dämpfung auf, endet die Trajektorie der freien Schwingung in einem der beiden Potentialminima. Dabei ist durch den Anfangszustand und die Dämpfung festgelegt, welches der beiden Minima den Endzustand darstellt. Der Schwingungszustand bleibt berechenbar (deterministisch). In der Praxis ist jedoch bei geringer Dämpfung (viele Schwingungen um beide Potentialmulden) der Anfangszustand nicht genau genug einstellbar, so dass sich nicht vorhersagen lässt, in welchem Minimum das Pendel zur Ruhe kommt.

Abb. 7 zeigt Messergebnisse zu erzwungenen Schwingungen des im Versuch benutzten und mit der Kreisfrequenz  $\omega_E$  erregten Drehpendels. Abb. 7a zeigt oben den zeitlichen Verlauf  $s(t)$  einer harmonischen Schwingung. Darunter ist das Frequenzspektrum  $f_1(\omega)$ , die Fourier-Transformierte von  $s(t)$  wiedergegeben (s. Versuch C3: Analyse akustischer Schwingungen). Es stellt dar, mit welchem Gewicht verschiedene Frequenzen  $\omega$  bzw.  $f$  in  $s(t)$  enthalten sind. Enthält  $s(t)$  z. B. nur die Zeitfunktion  $\sin\omega_E t$ , ist  $f_1(\omega)$  eine Deltafunktion  $\delta(\omega - \omega_E)$ . Wird  $s(t)$  über einen begrenzten Zeitraum  $\Delta t$  registriert, hat  $f_1$  einen endlich breiten Peak bei  $\omega_E$ , der Kreisfrequenz des Erregers (Abb. 7a, Mitte). Die Halbwertsbreite des Peaks ist proportional zur inversen Schwingungsdauer  $1/\Delta t$ . Das in Abb. 7a unten gezeigte Phasenraumdiagramm  $v(s)$  gleicht dem der freien ungedämpften harmonischen Schwingung (Abb. 6a).

In Abb. 7b ist oben  $s(t)$  für eine erzwungene stark bedämpfte Schwingung des mit zwei Zusatzmassen bestückten Pendels wiedergegeben. Die Schwingung hat eine wohldefinierte Periodendauer, gleichwohl ist sie nicht sinusförmig. Das Frequenzspektrum lässt erkennen, dass neben der *Grundschwingung* mit der Kreisfrequenz  $\omega_E$  des Erregers weitere Schwingungen, sog. *Oberschwingungen* mit Kreisfrequenzen  $2\omega_E$ ,  $3\omega_E$ ,  $4\omega_E$ , usw. auftreten. Das darunter gezeigte Phasenraumdiagramm ähnelt dem in Abb. 6b gezeigten. Die Trajektorie ist praktisch geschlossen, obwohl kleine Schwankungen der periodischen Werte von  $v$  und  $s$  auftreten, die Schwingung ist *quasi-periodisch*.

In Abb. 7c ist das Verhalten der erzwungenen Schwingung des mit Massen bestückten Pendels bei geringerer Dämpfung wiedergegeben. Der zeitliche Verlauf der Auslenkung  $s(t)$  hat grob gesehen noch eine gewisse Periode, die Amplituden der Schwingung sind jedoch stark schwankend. Das Frequenzspektrum zeigt zwar noch das Maximum bei der Kreisfrequenz des Erregers, daneben tritt jedoch ein ganzes Band weiterer Frequenzen auf, welche mit der Grundfrequenz in offensichtlich keinem einfachen rationalen Verhältnis stehen. Das Phasenraumdiagramm offenbart, dass die Schwingung nichtperiodisch ist. Die Trajektorie ist keine geschlossene Kurve, sie würde bei genügend langer Messzeit vermutlich das ganze (innere) Phasenraumvolumen durchlaufen. Der Schwingungszustand ist nach kurzer Zeit nicht mehr berechenbar, die Schwingung ist *chaotisch*.



**Abb. 7:** Auslenkung  $s(t)$ , Frequenzspektrum  $f_1(\omega)$  und Phasenraumdiagramm  $v(s)$  für a) erzw. harm. Schwingung, b) stark gedämpfte und c) schwach gedämpfte erzw. anharmon. Schwingung

### 3. Aufgabenstellung

#### Teil I

#### Harmonische Schwingungen

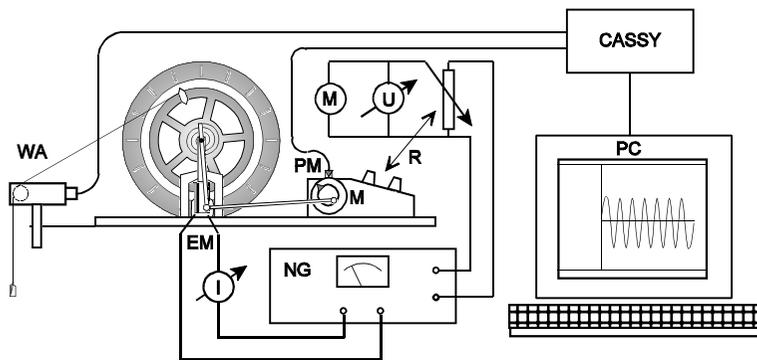
- 1. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Rückstellkraft  $F(s)$  des Drehpendels für Auslenkungen  $s = 0$  bis 20 cm.
- 2. Aufgabe:** Untersuchen Sie die freie Schwingung des Drehpendels für unterschiedlich starke Dämpfungen. Bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz  $f$ , die Amplitudenfunktion und Dämpfungskonstante  $\beta$  sowie die Schwingungsfrequenz  $f_0$  der freien ungedämpften Schwingung.
- 3. Aufgabe:** Untersuchen Sie die erzwungene Schwingung für zwei verschiedene Dämpfungsgrade bei Erregerfrequenzen  $f$  zwischen 0 und 0,7 Hz. Bestimmen Sie die Schwingungsamplitude  $s_0$  und Phase  $\alpha$  als Funktion der Erregerfrequenz und vergleichen Sie das Messergebnis mit der Theorie.

**Teil II Anharmonische und chaotische Schwingungen**

- 4. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Frequenz der ungedämpften bzw. schwach gedämpften freien Schwingung des Pendels in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude. Vergleichen Sie das Messergebnis mit der Theorie und den Ergebnissen der 1. Aufgabe.
- 5. Aufgabe:** Untersuchen Sie schwach gedämpfte erzwungene Schwingungen des Pendels in der Umgebung der Resonanzfrequenz  $f_0$  der freien ungedämpften Schwingung. Vergleichen Sie das Resonanzverhalten des schwach anharmonischen Pendels mit der Theorie.
- 6. Aufgabe:** Untersuchen Sie erzwungene Schwingungen des mit zwei Zusatzmassen bestückten anharmonischen Pendels bei unterschiedlichen Erregerfrequenzen und verschieden starker Dämpfung.

**4. Versuchsaufbau**

Abb. 8 skizziert den Versuchsaufbau. Die Bewegungsdaten  $s(t)$  des Pendels



**Abb. 8:** Versuchsaufbau schematisch: Drehpendel mit Netzgerät NG, Elektromagnet EM für Wirbelstrombremse u. Strommesser I, Erregermotor M mit Drehzahlregler R u. Spannungsmesser U, Phasemesser PM, Wegaufnehmer WA, Interface Cassy u. PC

werden mittels eines am Pendel befestigten Bindfadens vom Wegaufnehmer WA bestimmt und über das Interface CASSY dem PC zugeführt. Unabhängig von der Bewegungsmessung kann das Pendel zur Erzeugung erzwungener Schwingungen über eine Schubstange erregt werden, die exzentrisch auf der Achse des Motors M gelagert ist. Das Netzgerät NG liefert hierfür die über den Regler R grob und fein einstellbare Spannung U, von der die Motordrehzahl linear abhängig ist. Das Netzgerät liefert ebenfalls einen regelbaren Gleichstrom I für den Elektromagneten EM. Sein Magnetfeld B durchdringt das Pendelrad aus Kupfer an der unteren Seite und induziert in dem mit der Geschwindigkeit v bewegten Rad elektrische Wirbelströme, welche infolge der Rückwirkung auf das Feld das Pendel mit der Kraft  $F \sim I^2 v$  abbremsen. Mittels des Phasennessers PM, einer Lichtschranke zur Bestimmung der Phasendifferenz zwischen Erreger und Pendel, wird zum Zeitpunkt, bei welchem die Schubstange ihre Tiefstlage erreicht, ein Impuls über das Interface dem PC zugeführt.

Die Aufnahme und Auswertung der Messdaten wird mit dem allgemeinen Messprogramm *CASSY Lab* durchgeführt. Es ist menügesteuert und gestattet neben der Messwertaufnahme ( $s_i, t_i$ ) die unmittelbare Berechnung bzw. Auswertung sowie die Anzeige von Daten in Tabellen oder Graphen wie Geschwindigkeit ( $v_i, t_i$ ), Phasenraumdiagramm ( $s_i, v_i$ ), (Fast)Fouriertransformierte  $f_1(f)$ . Diverse Messparameter wie Zeitintervall ( $i, i+1$ ), Einzel- und Gesamtmesszeit, etc. sind vorwählbar. Darüber hinaus können die Daten graphisch auf dem Bildschirm ausgewertet, in Graphen oder Tabellen ausgedruckt bzw. gespeichert werden.

**5. Versuchsdurchführung und Auswertung Teil I**

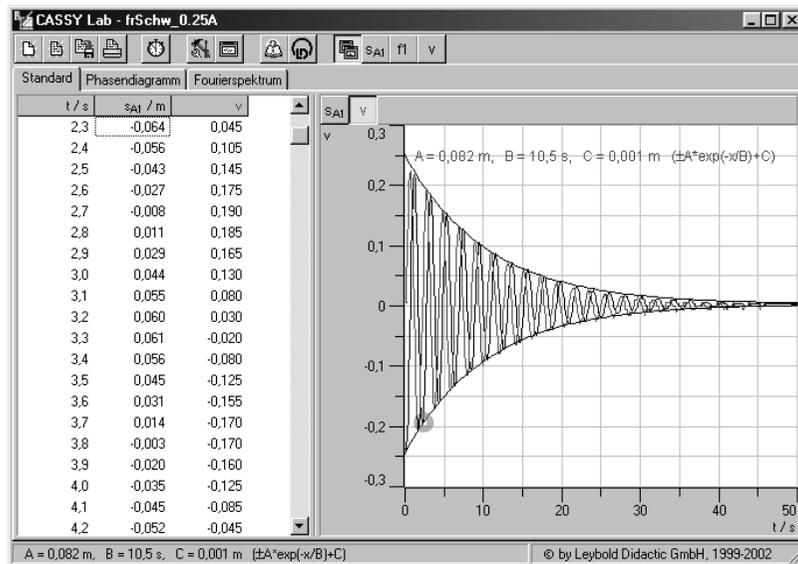
**5.1 1. Aufgabe**

Zur Bestimmung der Rückstellkraft  $F(s)$  des Drehpendels wird der Bindfaden unterhalb des Wegaufnehmers über eine Rolle geführt und mit einer an einem Stativ aufgehängten Federwaage (1 N) verbunden. Durch vertikales Verstellen der Waagenaufhängung lässt sich die Pendelauslenkung variieren und die entsprechende Kraft  $F(s)$  ablesen. Stellen Sie in der Ruhelage des Pendels ( $s = 0$ ) die Kraft  $F = 0$  an der Waage ein und bestimmen Sie  $F(s)$  für ca. 10 verschiedene Auslenkungen zwischen 0 und 16 Teilstrichen auf der Pendelskala. Der Abstand der Teilstriche auf der Skala entspricht 1,2 cm der Auslenkung  $s$  des Pendels. Schätzen Sie den Mess- bzw. Ablesefehler  $\Delta F$  bzw.  $\Delta s$  ab.

Tragen Sie zunächst  $F(s)$  auf. Lässt sich durch die Messpunkte im Rahmen der Messgenauigkeit eine Gerade zeichnen? Bis zu welcher Auslenkung ist die Rückstellkraft im Rahmen der Messfehler etwa proportional zur Auslenkung?

Tragen Sie darauf  $F/s$  ( $s^2$ ) auf und bestimmen Sie entsprechend Gl. (19) aus einer Ausgleichsgeraden die Koeffizienten  $\delta_0$  und  $\delta_1$  bzw.  $\delta$ .

## 5.2 2. Aufgabe



**Abb 9:** Monitorbild der Datei *frSchw\_0.25A* im Programm *CASSY LAB*, oben: Befehlskopfzeile, links: Tabelle (hier Standard:  $s_{A1}(t)$ ,  $v(t)$ ), rechts: Graph zur Standardtabelle, unten: Text zur Markierung der Graphikauswertung (hier Amplitudenfkt.)

Verbinden Sie zur Registrierung der Pendelschwingungen das Cassy Interface mit der Netzstecker-Stromversorgung. Stellen Sie vor den Messungen sicher, dass sich die Antriebsstange zwischen Motor und Pendelfeder in der Tiefstlage befindet, d.h. der Zeiger am Motorantrieb nach oben zeigt und der Hebel an der Pendelfeder senkrecht steht. Der Zeiger des Pendels sollte auf der Nullmarke stehen. Kontrollieren Sie, ob der Faden richtig auf dem Rad des Pendels und des Wegaufnehmers liegt. Öffnen Sie nach Einschalten des Computers im Ordner Cassylab die Datei *FRSCHW*.

In der Kopfzeile zeigt der Bildschirm (s. Abb. 9, *frSchw\_0.25A*) per Maus anklickbare Befehle wie *Neue Datei (geladene Datei löschen)*, *Datei laden*, *speichern*, *drucken* an. Mit dem Stoppuhrsymbol wird die Messung gestartet und

kann vor Ablauf der eingestellten Messzeit gestoppt werden. Nach Anklicken des Werkzeugsymbols werden die Messprogramm-Einstellungen angezeigt. Die Messparameter der Datei sind auf das Messintervall 100ms,  $x 4000$ , = (maximale Messzeit 400s, voreingestellt).

Der unter der Kopfzeile liegende Bereich des Bildschirms zeigt links 3 per Maus anklickbare Messwerttabellen an: *Standard*, *Phasendiagramm*, *Fourierspektrum*. In der Tabelle *Standard*, Abb. 9, ist die Zeit  $t$ , die gemessene Pendelauslenkung  $s_{A1}(t)$  sowie die daraus berechnete Geschwindigkeit  $v(t)$  aufgetragen. Der Graph rechts zeigt  $s_{A1}(t)$  und  $v(t)$  sowie die mit der rechten Maustaste zu aktuiierende Auswertung *Anpassung durchführen: Einhüllende  $e^{-x}$* . Mit gedrückter Maus wird der Bereich  $s(t)$  oder  $v(t)$  im Graphen markiert (Invertierung der Graphen, ausprobieren!). Mit der Auswertung *Markierung setzen, Text* wird der editierbare Text der Anpassungsparameter angezeigt und nach ok auf dem Graphen gesetzt.

Mit der rechten Maustaste kann aber auch z.B. durch den Befehl *letzte Auswertung löschen* die jeweils letzte Auswertung gelöscht oder nach Anklicken des Befehls *Bereich löschen* durch Ziehen der gedrückten Maustaste über den Graphen ein Bereich der Messwerte gelöscht werden (Ausprobieren!).

Untersuchen Sie zunächst die freie Schwingung ohne zusätzliche Dämpfung durch die Wirbelstrombremse ( $I = 0A$ ). Schalten Sie die Tabelle *Standard* ein und halten Sie zu Beginn der Messung den Zeiger des Pendels **vorsichtig** in der Anfangsposition 7 SKT ( $s \approx 8.4 \text{ cm}$ ). Starten Sie die Messung durch Drücken der Stoppuhrstaste und Loslassen des Pendelzeigers. Nach Ablauf der Messzeit bzw. Drücken der Stoppuhrstaste sollte der Monitor ein Bild wie in Abb. 9 zeigen. Gegebenenfalls kann die Skalierung der X- bzw. Y-Achse des Graphen durch Anklicken der jeweiligen Achse mit der rechten Maustaste optimiert werden. Die Kästchen am oberen Ende der Y-Achse zeigen an, welche Achse ( $s$  oder  $v$ ) gerade angezeigt wird. Nach Drücken mit der rechten Maustaste kann z.B. für  $s_{A1}$  der Nullpunkt korrekt gesetzt werden. Dies geschieht zweckmäßigerweise, wenn sich das Pendel in der Ruhelage befindet.

Einzelne Messwerte können auf dem Graphen durch Anklicken mit dem Cursor (linke Maustaste) bzw. auf der Tabelle ausgewählt werden. (Scrollen mit  $\uparrow$  u.  $\downarrow$ ). Im Graphen wird der Messpunkt durch einen hellblauen Kreis markiert, in der Tabelle wird der entsprechende Messwert eingerahmt. Durch Anklicken des Rahmens kann jeder der einzelne Messwert editiert bzw. gelöscht werden.

Zur Auswertung des  $s(t)$ - oder  $v(t)$ -Verlaufs wird nach Drücken der rechten Maustaste auf den Graphen, *Anpassung durchführen, Einhüllende  $e^{-x}$*  gewählt und der Bereich der  $s_{A1}(t)$ -oder  $v(t)$ -Werte durch Ziehen der gedrückten linken Maustaste markiert. Der markierte Datenbereich erscheint hellblau. Nach

Loslassen der Maustaste erfolgt die Anpassung. Nachfolgend wird mit der rechten Maustaste der Befehl *Markierung setzen, Text* gewählt und nach ok mit linkem Mausklick die Parameterzeile der Anpassung auf dem Graphen positioniert. Üben bzw. wiederholen Sie gegebenenfalls diese Schritte mit Hilfe des (mehrfach anwendbaren) rechte Maustaste-Befehls *letzte Auswertung löschen*. Ist der Graph ok, kann er fürs Protokoll ausgedruckt werden.

Schauen Sie sich anschließend die Graphen *Phasendiagramm* und *Fourierspektrum*  $f_1(f)$  an.  $v(s)$  sollte eine enge Spirale darstellen. Das  $f_1(f)$ -Spektrum zeigt einen scharfen Peak bei der Schwingungsfrequenz. Notieren Sie diesen Messwert und bestimmen Sie die Halbwertsbreite  $\Delta f$  des Peaks. Benutzen Sie dazu mit der rechten Maustaste auf dem Graphen die Option *Koordinaten anzeigen*. Notieren Sie zusätzlich aus dem Standard-Graphen die Gesamtzeit  $\Delta t$  der Schwingung.

Vor Beginn der nächsten Messung werden die Daten abgespeichert. Wählen Sie dazu als Dateinamen das Format [Gruppennummer]\_frSchw\_[Stromstärke], also z.B. für die Gruppe 123 bei 0,5A Stromstärke der Wirbelstrombremse: *123\_frSchw\_0.5A*.

Führen Sie nun entsprechende Messungen bei Stromstärken  $I = 0,25; 0,5; 1; 1,5$  u.  $2$  A durch. Die Stromstärke wird am Netzgerät des Pendels eingestellt und mit dem Strommesser gemessen. Werten Sie die Graphen  $s_{A1}(t)$ , wenn möglich wie zuvor aus. Bei welchen Messungen ist die Anpassung gut, bei welchen zeigen sich Abweichungen und warum? Bei welcher Stromstärke etwa wird der aperiodische Grenzfall beobachtet?

Diskutieren Sie Ihre Messergebnisse im Vergleich zur Theorie! Fassen Sie die Ergebnisse für  $B$  (wichtiger Parameter der Anpassung),  $f$ ,  $\Delta f$ ,  $\Delta t$  für die verschiedenen Stromstärken  $I$  tabellarisch zusammen. Tragen Sie zusätzlich die Werte für das Produkt  $\Delta f \Delta t$  sowie den Reibungskoeffizienten  $\beta$  ein. Wie sollten diese Größen von der Stromstärke  $I$  abhängen? Tragen Sie die Abhängigkeit  $\beta(I)$  entsprechend graphisch auf.

### 5.3 3. Aufgabe

Laden Sie zu Beginn der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen die Datei ERZSCHW. Es werden Messungen bei Dämpfungsstromstärken  $I = 0,25A$  und  $0,5A$  jeweils mit Motorspannungen  $U = 5; 6; 6,5; 7; 7,3; 7,5; 7,7; 8; 8,5; 9$  u.  $10V$ , d.h. mit steigender Erregerfrequenz  $f$  durchgeführt.

Beginnen Sie mit der Bestimmung der statischen Auslenkung  $s_0$ . Drehen Sie dazu das Exzenterrad zunächst so, dass der Pfeil nach oben zeigt (Phase 0). Setzen Sie

in der Einstellung *Standardtabelle* die Auslenkung nach Starten der Stoppuhr auf Null (rechte Maustaste auf Kästchen  $s_{A1}$ :  $- 0 +$ ). Drehen Sie nun bei laufender Messung das Exzenterrad in Schritten von  $90$  Grad nach rechts bis zurück zur Ausgangsstellung und registrieren Sie jeweils die Auslenkung. Ermitteln Sie nach Beenden der Messung mit dem Cursor (linke Maustaste auf dem Graphen) die Auslenkungen  $s_{\min}$  und  $s_{\max}$  und bestimmen Sie aus dem Betragsmittelwert  $s_0$ .

Stellen Sie darauf zunächst für  $I = 0,25A$ , dann in einer zweiten Messreihe für  $I = 0,5A$  die Spannung des Drehzahlreglers (Grob- u. Feineinstellung) mit  $U = 5V$  beginnend jeweils auf den oben angegebenen Wert ein und starten Sie die Messung. Beobachten Sie den zeitlichen Verlauf von  $s$  und  $v$ . Ist das Pendel eingeschungen, d.h. sind die Amplituden von  $s$  bzw.  $v$  zeitlich konstant, wird die Messung zur Registrierung wiederholt. Hierbei sollte die  $t$ -Achse (mit rechter Maustaste) auf die volle Messzeit (hier  $40s$ ) eingestellt sein.

Nach jeder Messung werden die Messdaten entsprechend unter dem Namen [Gruppennummer]\_erzwSchw\_[Strom]\_[Spannung] abgespeichert. Aus dem Fourierspektrum wird die Schwingungsfrequenz  $f$  (Peakfrequenz) ermittelt und notiert.

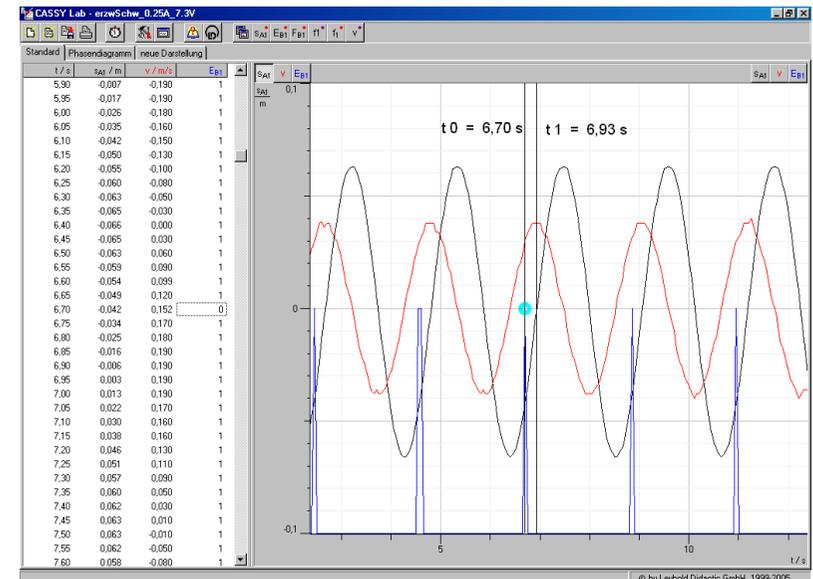


Abb 10: Monitorbild der Datei *erzwSchw\_0.25A\_7.3V* (Ausschnitt)

In der weiteren Auswertung sind jeweils die Amplitude  $s_0$  und der Phasenwinkel  $\alpha$  der Schwingung zu bestimmen. Dies kann entweder mit dem Programm *CASSY LAB* direkt (s.u.) oder später erfolgen, ist aber auch mit Hilfe eines Ausdrucks des Graphen leicht möglich. Hierzu wird die Zeitachse des Graphen der Standardtabelle zweckmäßigerweise auf 10s reduziert und der Graph ausgedruckt. Abb. 10 zeigt das typische Monitorbild einer erzwungenen Schwingung im Ausschnitt der Standardtabelle. Die Größe  $E_{B1}$  zeigt den Wert 0 (Spitze im Graphen), wenn das Exzenterad die Phasenlage 0 hat. Ansonsten ist  $E_{B1} = 1$ . Die vertikal eingezeichnete Linie bei  $t_0 = 6,7s$  markiert eine solche Phase zur Illustrierung. Die zweite eingezeichnete Linie bei  $t_1 = 6,93s$  markiert den nachfolgenden Nulldurchgang von  $s_{A1}$  (bzw. das Maximum von  $v$ ). Der Phasenwinkel  $\alpha$  der Schwingung ergibt sich aus  $\alpha = 2\pi f(t_0 - t_1) = 2\pi(t_0 - t_1)/T$ . Er ist aus mindestens 3 Intervallen  $(t_0, t_1)$  zu bestimmen. Mit der aus dem Fourierspektrum ermittelten Frequenz  $f$  (hier 0,47 Hz) oder mit der aus dem Graphen ermittelten Schwingungsdauer  $T$  (hier 2,13s) erhält man  $\alpha$  (hier  $-0,22\pi$  bzw.  $-39^\circ$ ). Die Amplitude  $s_0$  lässt sich leicht im Graphen durch horizontale Ausgleichsgeraden bei  $s_{max}$  und  $s_{min}$  ermitteln. Wer fix im Umgang mit dem Computer ist und sich die Heimarbeit mit den Graphen ersparen will, kann direkt nach jeder erfolgreichen Messung mit dem Cursor (linke Maustaste,  $\uparrow\downarrow$ ) *mindestens* 3 Maxima u. Minima von  $s_{A1}$  sowie 3 Intervalle  $(t_0, t_1)$  bestimmen.

Zur Diskussion der Ergebnisse ist  $s_0(f)$  und  $\alpha(f)$  in zwei Graphen wie in Abb. 3 aufzutragen. (Millimeterpapier!). Ermitteln Sie graphisch die Höhe und Lage der Resonanzmaxima  $s_{max}(f_{max})$  und vergleichen Sie diese mit der Theorie, Gl. 18. Schätzen Sie hierbei auch die Fehler in  $s_{max}$  und  $f_{max}$  bei der graphischen Auswertung ab. Benutzen Sie beim Vergleich zwischen Experiment und Theorie die in der zweiten Aufgabe erzielten Ergebnisse für  $\beta$  und  $\omega_0$ .

## 6. Versuchsdurchführung und Auswertung Teil II

folgt später.

## 7. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche Bedingungen sind notwendig, damit ein schwingfähiges mechanisches System harmonische Schwingungen ausführt?
- 2) Welche zeitabhängige Funktion beschreibt eine harmonische Schwingung in allgemeiner Form?
- 3) Wie lautet die Bewegungsgleichung einer freien Drehschwingung mit viskoser Reibung?

- 4) Wie lautet die Lösung der freien Drehschwingung mit unterschiedlichem Dämpfungsgrad für a) den Schwingfall, b) den Kriechfall, c) den aperiodischen Grenzfall?
- 5) Wie beeinflusst die Gleitreibung, z.B. die eines Lagers, die freie Schwingung?
- 6) Wie funktioniert eine Wirbelstrombremse? Wie hängt der Dämpfungskoeffizient  $\beta$  vom Strom  $I$  durch die Bremse ab?
- 7) Welches Verhalten zeigen Amplitude und Phase einer erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz? Was kennzeichnet den Zustand der Resonanz? Von welchen Größen hängt die Resonanzfrequenz ab?
- 8) Wie lässt sich eine schwach anharmonische Schwingung (Schwingung im schwach anharmonischen Potential) näherungsweise beschreiben? Was wird bei einer solchen erzwungenen Schwingung in Resonanznähe bei geringer Dämpfung (d.h. großer Auslenkung) beobachtet?
- 9) Zeichnen sie schematisch das Phasenraumdiagramm und Fourierspektrum für eine a) harmonische, b) schwach bzw. c) stark anharmonische, d) chaotische Schwingung!