Versuch A 4: Gekoppelte Pendel

1. Literatur: Dobrinski/Krakau/Vogel, Physik für Ingenieure
Krötzsch, Physikalisches Praktikum für Anfänger
Berkely-Physikkurs, Mechanik; Schwingungen und Wellen
Gerthsen, Physik
Bergmann-Schaefer, Bd. 1: Mechanik

Stichworte: Physisches Pendel, Schwerependel, Torsionsschwingung, Bewegungsgleichung, Eigenfrequenz, gekoppelte Pendel, Schwebung, Kopplungsgrad.

2. Grundlagen

2.1 Entkoppelte Pendel

Das im vorliegenden Versuch verwendete Gerät besteht aus zwei gleichen physischen Schwerependeln, die durch einen Metallstab längs ihrer gemeinsamen Pendelachse gekoppelt werden können. Sind die Pendel entkoppelt, so entsprechen sie jeweils einzelnen Pendeln, auf die bei ihrer Auslenkung das durch die Schwerkraft bedingte rücktreibende Drehmoment M_S wirkt.

Die Bewegungsgleichung eines solchen Schwerependels lautet:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M_S = 0 \qquad (1)$$

I ist das Trägheitsmoment des Pendels (siehe Versuch A8) und φ der Auslenkwinkel. Für das rücktreibende Drehmoment M_S gilt

$$M_S = mgl\sin\varphi \approx mgl\varphi = D_S\varphi \quad (\text{für } \varphi \text{ ca. } \leq 5°) \qquad (2)$$

Hier ist m die Pendelmasse, g die Erdbeschleunigung und l der Abstand des Pendelschwerpunkts von der Pendelachse. Die durch die Schwerkraft bedingte Größe D_S = mgl heißt *Winkelrichtgröße.*

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (1) lautet:

$$\varphi = a\sin(\omega_S t) + b\cos(\omega_S t) = \varphi_0\sin(\omega_S t + \alpha) \qquad (3)$$

wobei a, b bzw. φ_0 und α Konstanten sind und ω_S die Eigenkreisfrequenz der Schwereschwingung ist.

$$\omega_S = \sqrt{\frac{D_S}{I}} \qquad (4)$$

Koppelt man beide Pendel an den Metallstab und lässt eines schwingen, während das andere festgehalten wird, entsteht durch die Torsion des Stabes ein zusätzliches rücktreibendes Drehmoment M_T auf das schwingende Pendel. Denkt man sich die Schwerkraft zunächst ausgeschaltet, so hat man es lediglich mit einem Torsionspendel zu tun, dessen Bewegungsgleichung lautet:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M_T = 0 \qquad (5)$$

Für kleine Auslenkwinkel φ ist $M_T = D_T\,\varphi$, wobei D_T die Winkelrichtgröße des Torsionspendels ist.

$$D_T = \frac{\pi R^4 G}{2\, l_T} \qquad (6)$$

R ist der Radius, l_T die eingespannte Länge des Torsionsstabes, G der Schubmodul, eine Materialkonstante. (Zur Ableitung von Gl.(6) siehe Versuch A9).

Entsprechend zu Gln. (1), (3) und (4) führt die Lösung von Gl. (5) zur Torsionsschwingung mit der Eigenfrequenz

$$\omega_T = \sqrt{\frac{D_T}{I}} \qquad (7)$$

Die Gleichungen (1) und (5) kann man daher auch schreiben als:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_S^2\varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_T^2\varphi = 0 \qquad (1a, 5a)$$

2.2 Gekoppelte Pendel

Koppelt man die Pendel (siehe Abb.1), so gilt bei unterschiedlichen Auslenkwinkeln φ_1 und φ_2 für die Drehmomente durch die Schwerkraft:

1. Pendel: $M_{S1} = D_S\,\varphi_1$ 2. Pendel: $M_{S2} = D_S\,\varphi_2$

Für die Torsionsmomente $M_{T1} = -M_{T2}$ gilt:

1. Pendel: $M_{T1} = D_T\,(\varphi_1 - \varphi_2)$ 2. Pendel: $M_{T2} = D_T\,(\varphi_2 - \varphi_1)$

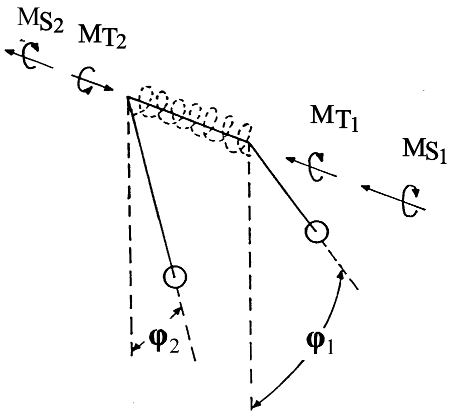

Abb.1: Schwingungsverhalten gekoppelter Pendel

Die Differenzialgleichungen der gekoppelten Pendel lauten damit:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \omega_S^2\,\varphi_1 + \omega_T^2\,(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \omega_S^2\,\varphi_2 + \omega_T^2\,(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \qquad (9)$$

Um diese zu lösen, addiert und subtrahiert man diese Gleichungen. Substituiert man dann:

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2\,; \qquad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2\,; \qquad \omega_{ST}^2 = \omega_S^2 + 2\,\omega_T^2$$

so lauten die nun *entkoppelten* Differenzialgleichungen:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \omega_S^2\,\psi_1 = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} + \omega_{ST}^2\,\psi_2 = 0 \qquad (11)$$

Diese Gleichungen entsprechen Gl.(1a) bzw. (5a) und ihre allgemeinen Lösungen der Gl.(3). Setzt man wieder die ursprünglichen Größen:

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{\psi_1 - \psi_2}{2}$$

ein, so erhält man

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}[a_1 \cos(\omega_S t) + a_2 \cos(\omega_{ST} t) + b_1 \sin(\omega_S t) + b_2 \sin(\omega_{ST} t)] \qquad (12)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}[a_1 \cos(\omega_S t) - a_2 \cos(\omega_{ST} t) + b_1 \sin(\omega_S t) - b_2 \sin(\omega_{ST} t)] \qquad (13)$$

Mit den Anfangsbedingungen, dass zur Zeit t = 0 beide Pendel in Ruhe sind, d.h. $d\varphi_1(0)/dt = d\varphi_2(0)/dt = 0$, erhält man nach Differenzieren und Einsetzen:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}[a_1 \cos(\omega_S t) + a_2 \cos(\omega_{ST} t)] \qquad (14)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}[a_1 \cos(\omega_S t) - a_2 \cos(\omega_{ST} t)] \qquad (15)$$

Wir betrachten nun drei Spezialfälle:

1. Fall: gleichsinnige Schwingung

Zur Zeit t = 0 seien beide Pendel gleich ausgelenkt:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$$

Aus den Gl. (14) und (15) folgt dann:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}(a_1 - a_2) \quad \text{d.h.} \quad a_1 = 2\varphi_0 \;;\; a_2 = 0$$

Die Lösung der Schwingungsgleichung lautet also:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos(\omega_S t) \tag{16}$$

Beide Pendel schwingen gleichsinnig mit der Kreisfrequenz des Schwerependels.

2. Fall: gegensinnige Schwingung

Es sind zur Zeit t = 0:

$$\varphi_1(0) = +\varphi_0 \;,\; \varphi_2(0) = -\varphi_0$$

d.h., beide Pendel sind gegensinnig ausgelenkt. Aus Gl. (14) und Gl. (15) erhält man:

$$a_1 = 0 \;,\; a_2 = 2\varphi_0$$

und die Lösung der Schwingungsgleichung lautet:

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos(\omega_{ST} t) \tag{17}$$

Die Kreisfrequenz der Schwingung

$$\omega_{ST} = \sqrt{\omega_S^2 + 2\omega_T^2}$$

ist größer als im Fall 1 und stark von der Kopplung abhängig.

3. Fall: Schwebeschwingung

Für diesen (auch in der Praxis, z.B. bei elektrischen Schwingkreisen bedeutenden) Fall ist zur Zeit t = 0:

$$\varphi_1(0) = 0 \;,\; \varphi_2(0) = \varphi_0$$

d.h., ein Pendel ist ausgelenkt, das andere in Ruhe. Aus Gl. (14) und (15) folgt:

$$a_1 = -a_2 = \varphi_0$$

Die Lösungen der Schwingungsgleichungen lauten dann:

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2}[\cos(\omega_S t) - \cos(\omega_{ST} t)] \tag{18}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2}[\cos(\omega_S t) + \cos(\omega_{ST} t)] \tag{19}$$

Die durch diese Gleichungen beschriebenen Schwingungen haben einen scheinbar komplizierten Verlauf, da die Bewegung eines jeden Pendels aus der Überlagerung zweier Schwingungen mit verschiedenen Kreisfrequenzen ω_S und ω_{ST} besteht.

Durch Anwendung des Additionstheorems für cos α ± cos β können die Gln. (18) u. (19) jedoch auch geschrieben werden als:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_{ST} - \omega_S}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_{ST} + \omega_S}{2} t\right) \tag{20}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_{ST} - \omega_S}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_{ST} + \omega_S}{2} t\right) \tag{21}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Kopplung nur schwach ist, unterscheiden sich ω_S und ω_{ST} nur wenig. Die Gln. (20) und (21) beschreiben dann Schwingungen mit der (gegenüber ω_S nur leicht höheren) sog.

Kopplungskreisfrequenz $$\omega_K = \frac{\omega_{ST} + \omega_S}{2} \tag{22}$$

deren Amplitude mit der (gegenüber ω_S wesentlich kleineren)

Amplitudenkreisfrequenz $$\omega_A = \frac{\omega_{ST} - \omega_S}{2} \tag{23}$$

schwankt. Dies bezeichnet man als *Schwebeschwingung* bzw. *Schwebung* mit der sog.

Schwebungskreisfrequenz $$\omega_{Sch} = \omega_{ST} - \omega_S \tag{24}$$

bzw. Schwebungsperiode $T_{sch} = 2\pi/\omega_{Sch}$. Man beachte, dass T_{Sch} die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Schwebungsnullstellen ist (s. Abb. 2).

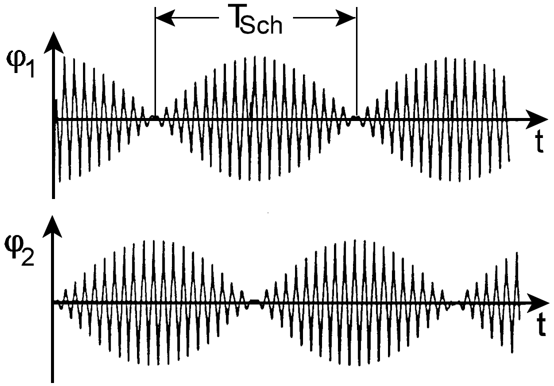

Abb.2: Schwebungsschwingung

Der *Kopplungsgrad* κ der Pendel ($0 \leq \kappa \leq 1$) beschreibt die relative Stärke der Kopplung zwischen den Pendeln. Er ist definiert als das Verhältnis der Winkelrichtgröße D_T zur Summe der Winkelrichtgrößen $D_T + D_S$:

$$\kappa = \frac{D_T}{D_T + D_S} = \frac{\nu_{ST}^2 - \nu_S^2}{\nu_{ST}^2 + \nu_S^2} \tag{25}$$

Der Messung mittels einer Stoppuhr sind prinzipiell zugänglich die Schwingungszeiten $T_S = 2\pi/\omega_S$ und $T_{ST} = 2\pi/\omega_{ST}$ sowie $T_K = 2\pi/\omega_K$ und T_{Sch}. Mit im Versuch benutzten Bewegungsaufnehmern und einem daran angeschlossenen PC sind jedoch über die direkte Aufzeichnung der Schwingungen hinaus mittels einer Frequenzanalyse sehr leicht die Frequenzen $\nu_S = \omega_S/2\pi$ und $\nu_{ST} = \omega_{ST}/2\pi$ der Schwingungen der gleichsinnig und gegensinnig ausgelenkten Pendel sowie der Schwebeschwingung bestimmbar.

2.3 Bestimmung des Schubmoduls

Im vorliegenden Versuch wird der Kopplungsgrad der Pendel durch Verwendung von Torsionsstäben verschiedener Radien (desselben Materials) verändert. Dies ermöglicht, den Schubmodul G der Torsionsstäbe zuverlässig zu bestimmen. Aus der Messung der Schwingungsfrequenzen ν_S und ν_{ST} ist mittels Gln. (4), (6) und (7) sowie mit $\omega_T^2 = (\omega_{ST}^2 - \omega_S^2)/2$ die Berechnung von G möglich:

$$G = \frac{4\pi l_T I}{R^4}\left(\nu_{ST}^2 - \nu_S^2\right) \tag{26}$$

Hierbei ist jedoch auch die Bestimmung des Trägheitsmoments I eines der beiden Pendel notwendig. Da dieses aus geometrischen Gründen nicht einfach berechnet werden kann, geht man wie folgt vor:

Man bestimmt die Schwingungsfrequenzen ν_S und ν_{S0} des entkoppelten Pendels 1 mit und ohne angehängte Scheiben der Masse m (s.u.). Mit dem Ansatz

$$I = I_0 + I_m \tag{27}$$

ist I bzw. I_0 das Trägheitsmoment mit bzw. ohne Massescheiben und I_m das der Massescheiben. Nach dem Satz von Steiner (vergl. Versuch A8) ist

$$I_m = m\left(l_m^2 + \frac{R_i^2 + R_a^2}{2}\right) \approx m l_m^2 \qquad (28)$$

Hierbei ist l_m der Abstand der Scheibenachsen von der Drehachse des Pendels und R_i bzw. R_a der innere bzw. äußere Radius der gelochten zylinderförmigen Scheiben. (Der zweite Term in der Klammer kann hier vernachlässigt werden.)

Mit einem Gl. (27) entsprechenden Ansatz für die Winkelrichtgröße D_S:

$$D_S = D_{S0} + D_{Sm}\,, \qquad D_{Sm} = m g l_m \qquad (29)$$

gilt mit Gln. (4) und (28)

$$\omega_S^2 (I_0 + m l_m^2) = \omega_{S0}^2 I_0 + m g l_m \qquad (30)$$

Auflösen von Gl.(30) nach I_0 und Einsetzen in Gl.(27) ergibt:

$$I = \frac{m l_m (g/4\pi^2 - \nu_{S0}^2 l_m)}{\nu_S^2 - \nu_{S0}^2} \qquad (31)$$

3. Aufgabenstellung

1. Aufgabe: Die Schwingungen der auf gleiche Schwingungszeiten eingestellten entkoppelten Pendel sind aufzuzeichnen und ihre Schwingungsfrequenzen $\nu_{S1,2}$ zu bestimmen.

2. Aufgabe: Die Schwingungen der mit einem Torsionsstab von R = 1 mm Radius gekoppelten und gleichsinnig sowie gegensinnig ausgelenkten Pendel sind aufzuzeichnen und ihre Schwingungsfrequenzen $\nu_{S1,2}$ sowie $\nu_{ST1,2}$ zu bestimmen.

3. Aufgabe: Es sind die Schwebeschwingungen der mit Torsionsstäben R = 1; 1,5; 1,75 und 2 mm Radius gekoppelten Pendel aufzuzeichnen und ihre Schwingungsfrequenzen $\nu_{S1,2}$ sowie $\nu_{ST1,2}$ zu bestimmen.

4. Aufgabe: Aus den Messergebnissen ist in der Auswertung der jeweilige Kopplungsgrad κ der Pendel sowie der Schubmodul G des verwendeten Stabmaterials zu bestimmen.

4. Versuchsaufbau

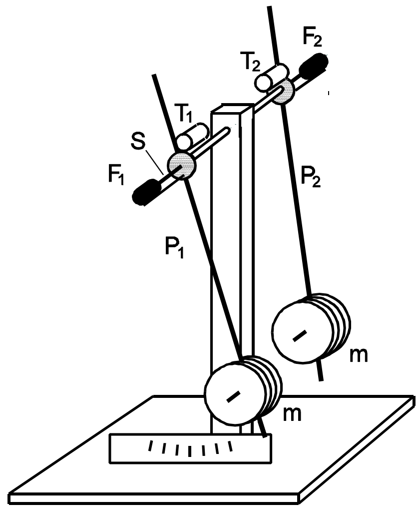

Abb. 3:

Doppelpendel mit Einzelpendeln P_1, P_2, Torsionsstab S zwischen Bohrfuttern F_1, F_2 und Tachogeneratoren T_1, T_2

Abb. 3 zeigt den Aufbau der gekoppelten Pendel P_1 und P_2 schematisch. In der gemeinsamen Drehachse der Pendel ist ein Torsionsstab S gelagert, an dessen Enden über zwei Bohrfutter F_1 und F_2 die Pendel gekoppelt sind. In zwei Tacho-Generatoren T_1 und T_2 werden zu den Drehgeschwindigkeiten $d\varphi_1/dt$ und $d\varphi_2/dt$ der Pendel proportionale Spannungen U_a und U_b erzeugt, die über ein Interface von einem PC registriert werden. Der zeitliche Verlauf $U_a(t)$ bzw. $U_b(t)$ entspricht bis auf einen Phasenfaktor $\pi/2$ (T/4 Zeitverschiebung) dem zeitlichen Verlauf der Auslenkwinkel φ_1 und φ_2 der Pendel.

Durch Verändern der Massen m der an die Pendel angehängten Scheiben und ihrer Positionen an den unteren Pendelenden können die Schwingungszeiten grob, durch verstellbare Gewichte an den oberen Pendelenden (hier nicht gezeigt) fein justiert werden.

Die Aufnahme und Auswertung der Messdaten $U_a(t)$ und $U_b(t)$ im PC wird innerhalb des allgemeinen Messprogramms *CASSY Lab* mit der Messdatei *Doppelpendel* durchgeführt. Das Programm ist menügesteuert und gestattet neben der Messwertaufnahme (U_{ai}, U_{bi}, t_i) die Berechnung und Anzeige der Daten in Tabellen oder Graphen sowie ihre direkte graphische Auswertung.

Hier werden die Spannungen $U_{a,b}(t) \sim d\varphi_{1,2}/dt$ und die „Frequenzspektren“ $F_{a,b}(f)$, (Fast-Fouriertransformierten von $U_{a,b}(t)$) aufgezeichnet. Letztere zeigen durch Peaks im Frequenzverlauf (zwischen ca. 0,5 und 1,0 Hz) an, welche Frequenzen die untersuchten Schwingungen enthalten. Diese können über mittels Maus ausgewählten Befehlen (s.u.) am Bildschirm einzeln ausgewertet, im jeweiligen Graphen markiert, notiert und in einer Messdatei gespeichert werden. Diverse einstellbare Messparameter wie Zeitintervall (i, i+1), Einzel- und Gesamtmesszeit, etc. sind wählbar jedoch in der Messdatei *Doppelpendel* bereits voreingestellt.

Abb. 4 zeigt den Programmbildschirm zur Messdatei *Doppelpendel* mit einem bereits ausgewerteten Messbeispiel, dem Frequenzspektrum einer Schwebungs-schwingung gekoppelter Pendel.

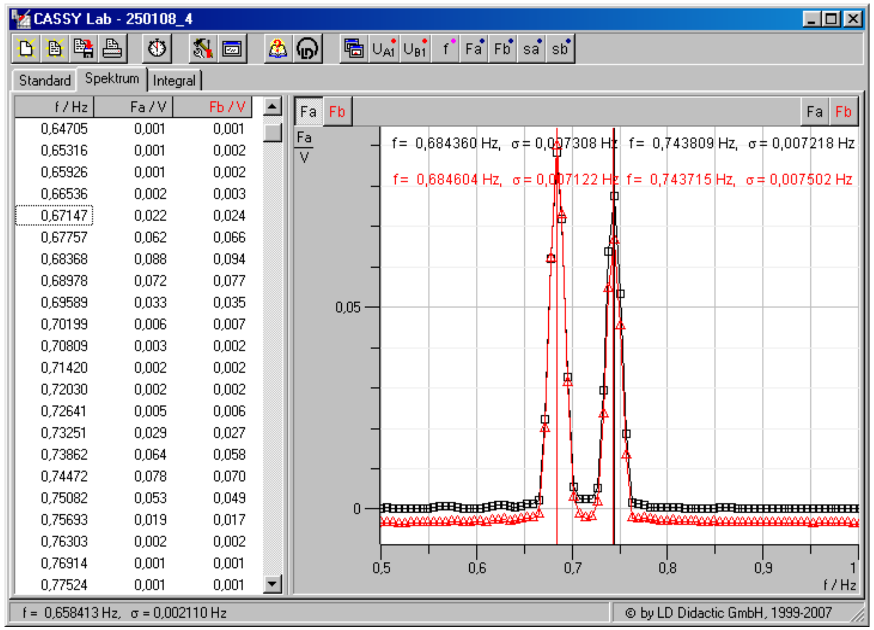

Abb. 4: Bildschirmansicht des graphisch ausgewerteten *Spektrums* einer Schwebeschwingung im Messprogramm *Doppelpendel*; schwarz: Pendel 1, rot: Pendel 2

In der oberen Menueleiste des Programms befinden sich die per Mausklick aktuierbaren Programmbefehle v.l.n.r.: *Neue Datei, Datei laden, Datei speichern,*

Datei drucken, Start bzw. *Stopp* der aktuellen Messung, *Messparameter* etc.

In der darunter liegenden Dateileiste werden im Ordner *Standard* die direkt aufgenommenen Messwerte t_i, U_{ai}, U_{bi} links darunter in einer Tabelle, rechts daneben in einem Graphen zweifarbig (a,b) dargestellt.

In dem in Abb. 4 gezeigten Dateiordner *Spektrum* sind die spektralen Werte F_a und F_b der Schwebungsschwingung gezeigt. Die entsprechende Skala kann nach linkem Mausklick (LM) auf F_a bzw. F_b (im Kästchen links oben gezeigt) mit gedrückter LM vertikal verschoben werden; nach rechtem Mausklick (RM) kann sie verändert werden. Ebenso kann die gemeinsame Frequenzachse varriert werden.

Die im Graphen von Abb. 4 sichtbaren Peaks (links für ν_S, rechts für ν_{ST}) sind für Pendel 1 (schwarz) und Pendel 2 (rot) nahezu identisch. Die Bestimmung ihrer Frequenzwerte geschieht zweckmäßigerweise zuerst mit F_a gedrückt, schwarz, dann F_b gedrückt, rot, folgendermaßen:

Zur getrennten Auswertung eine Skala (z.B. F_a) gegen die andere (z.B. F_b) leicht verschieben, so dass die Basiswerte versetzt zueinander sind (s. Abb. 4);

mit RM über der Grafik das Grafik-Menue öffnen, mit LM *weitere Auswertungen, Peakschwerpunkt bestimmen* wählen;

mit gedrückter LM symmetrisch über die Messsymbole in der Basislinie des auszuwertenden Peaks ziehen (die ausgewählten Messwerte werden invertiert dargestellt); nach Loslassen erscheint eine vertikale Linie beim Peakschwerpunkt;

mit RM bzw. LM *Markierung setzen*, *Text* wählen, nach Erscheinen des Textfensters (mit Frequenzwerten und Fehler der Linie) und *OK* mit LM Text an der gewünschten Stelle absetzen.

Mit dem Befehl *letzte Auswertung löschen* im Grafik-Menue kann die jeweils zuvor durchgeführte Auswertung, z.B. zu ihrer Wiederholung, gelöscht werden.

5. Versuchsdurchführung

Die beiden Pendel werden entkoppelt. Die Massenscheiben (m = 2 kg) sollten für jedes Pendel im Abstand l_m = 0,45 m von der Pendelachse angebracht sein. Die Pendel sind nach gleichsinniger Auslenkung um einen Winkel von ca. 5° zum Schwingen zu bringen. Fragen Sie die für den Versuch zuständige studentische

Hilfskraft, ob die Pendel schon auf gleiche Schwingungsdauer justiert sind. Gegebenenfalls sind sie durch die Feinjustierung an den oberen Pendelenden so lange nachzuregulieren, dass sich nach ca. 50 Schwingungen keine beobachtbaren Abweichungen zwischen den Schwingungsphasen feststellen lassen.

Schließen Sie das Steckernetzteil des Cassy-Interface an die Stromversorgung an und schalten Sie den PC (unter der Tischplatte) ein. Nach Hochfahren des Rechners ist vom Desktop das Programm *CassyLab* zu laden und (nach Schließen der Einstellungsfenster) im Ordner *Praktikum\Doppelpendel* die Messdatei *Doppelpendel.lab*. Der Dateiordner *Standard* sollte eingestellt sein.

5.1 1. Aufgabe

Die Pendel sind gleichsinnig auf etwa 5° auszulenken. Nach Loslassen der Pendel ist durch LM auf das Stoppuhrsymbol die Messung zu starten. Schalten Sie nach Ablauf der Messzeit (120 s) auf den Datenordner *Spektrum* um und optimieren Sie den Graphen in der Skalierung F_a bzw. F_b sowie gegebenenfalls f. Bestimmen Sie nach Verschieben der Basislinie F_a die Peakfrequenzen wie oben angegeben.

Notieren Sie die Frequenzwerte f_a bzw. f_b (es genügen 4 Nachkommastellen!) d.h. ν_{S1} bzw. ν_{S2} der Schwingungen der Schwerependel und speichern Sie die Messdatei unter dem Namen *Gruppennr._Aufg.Nr.1a* (z.B.123_1a) im Ordner des laufenden Semesters ab.

Danach sind von Pendel 1 zur Bestimmung der Trägheitsmomente I bzw. I_0 die Massescheiben zu entfernen. Nach Auslenkung des Pendels 1 ist die Messung erneut zu starten und nach dem Ende der Pendelbewegung vorzeitig zu stoppen, danach wie zuvor die Frequenz $f_a = \nu_{S10}$ zu bestimmen und zu notieren sowie die Messdaten in der Datei *Gruppennr._Aufg.Nr.1b* (z.B.123_1b) im Ordner des laufenden Semesters abzuspeichern.

5.2 2. Aufgabe

Die mit je 2 kg belasteten Pendel werden mit einem Torsionsstab mit nominell 1 mm Radius gekoppelt und nach gleichsinniger (möglichst gleicher) Auslenkung (warum?) um ca. 5° zum Schwingen gebracht. Die Schwingungsfrequenzen ν_{S1} u. ν_{S2} sind wie zuvor zu bestimmen und die Messdatei unter dem Namen *Gruppennr._Aufg.Nr.2a* (z.B.123_2a) wie zuvor abzuspeichern.

Danach sind die mit dem selben Torsionsstab gekoppelten Pendel nach (möglichst gleicher!) gegensinniger Auslenkung um ca. 5° zum Schwingen zu bringen und in der Auswertung der Messung die Schwingungsfrequenzen f_a und f_b bzw. ν_{ST1} und ν_{ST2} zu bestimmen, zu notieren und die Messdaten mit dem Namen

Gruppennr._Aufg.Nr.2b (z.B.*123_2b*) wie zuvor abzuspeichern.

5.3 3. Aufgabe

Halten Sie Pendel 2 in der Ruhelage fest und lenken Sie Pendel 1 um ca. 5° aus. Starten Sie nach Loslassen beider Pendel die Messung und bestimmen Sie in der Auswertung der Messung die Frequenzen $\nu_{S1,2}$ sowie $\nu_{ST1,2}$ der Schwebe-schwingung.

Im allgemeinen ist mit dem Torsionsstab von 1mm Radius die Kopplung der Pendel so schwach, dass die Frequenzpeaks um ν_S und ν_{ST} im Spektrum nicht hinreichend aufgelöst sind. Lediglich ein breiterer Peak bzw. ein Doppelpeak um die Kopplungsfrequenz ν_K erscheint, s. Gl.(22). Bestimmen Sie daher ν_K im Spektrum als Schwerpunkt des gesamten Peaks und die Schwebungsperiode T_{Sch} im Diagramm des Standardordners. Letzeres geschieht folgendermaßen:

> Im Standardordner mit RM im Grafikmenue *Markierung setzen, senkrechte Linie* wählen, diese mit LM an die jeweiligen Stellen der Schwebungsnullstellen absetzen;
>
> dann mit RM *Markierung setzen*, *Differenz messen* mit LM eine jeweils eine horizontale Linie zwischen den Vertikalen ziehen;
>
> danach jeweils mit RM *Markierung setzen, Text* den Wert der Länge der Linie d.h. den zeitlichen Abstand T_{Sch} markieren.

Notieren Sie ν_K und die ermittelten Schwebungsperioden und speichern Sie die Daten unter dem Dateinamen *Gruppennr._Aufg.Nr.3a* (z.B.*123_3a*).
Anm.: In der Auswertung können ν_S und ν_{ST} mit Gln. (22) u. (24) aus ν_K und T_{Sch} berechnet werden.

Bestimmen Sie darauf die Schwebeschwingungen der mit den Torsionsstäben mit nominell R = 1,5; 1,75 u. 2 mm gekoppelten Pendel und notieren sowie speichern Sie die Frequenzen bzw. Messdaten in den Dateien *Gruppennr._Aufg.Nr.3b,c,d* (z.B.*123_3b,c,d*).

Zum Abschluss der Messungen sind die genauen Durchmesser der Torsionsstäbe mit einer Mikrometerschraube zu bestimmen. Messen Sie diese für jeden Stab mindestens dreimal an verschiedenen Stellen des Stabes.

Drucken Sie für das Protokoll den Zeitverlauf der Schwingungen sowie das Frequenzspektrum der ungekoppelten sowie der mit Stab R = 1 mm gekoppelten Pendel aus.

6. Auswertung

Bestimmen Sie den Mittelwert der jeweiligen Schwingungsfrequenzen ν_S und ν_{ST} der Pendel 1 und 2 sowie deren mittleren Fehler.

Bestimmen Sie den Kopplungsgrad κ der Pendel für die verschiedenen Radien der Torsionsstäbe.

Zur Bestimmung des Schubmoduls der Stäbe ist zunächst aus den Ergebnissen der 1. Aufgabe mit Gl. (31) das Trägheitsmoment I von Pendel 1 zu berechnen.

$$m = 2\text{ kg}, \quad l_m = 0{,}45\text{ m}$$

Gemäß Gl. (26) sollte ν_{ST}^2 proportional zu R^4 variieren, ν_S^2 gem. Gl. (4) nicht vom Radius der Stäbe abhängen. Der Schubmodul ist grafisch aus der Steigung einer Ausgleichsgeraden $\nu_{ST}^2(R^4)$ zu ermitteln. Hierbei sind die jeweiligen Messfehler $\Delta\nu_{ST}$ sowie $\Delta R = \pm\, 0{,}01$ mm zu berücksichtigen. Tragen Sie dazu ν_{ST}^2 und ν_S^2 über R^4 auf Millimeterpapier auf. Zu jedem Messpunkt ν_{ST}^2 und ν_S^2 ist (wenn möglich) ein vertikaler sowie horizontaler Fehlerbalken

$$\Delta\nu_{ST}^2 = \pm\, 2\nu_{ST}\Delta\nu_{ST}\,, \qquad \Delta R^4 = \pm\, 4R^3\Delta R$$

einzuzeichnen. Diese Fehlerbalken spannen jeweils ein Rechteck um jeden Messpunkt auf. Zeichnen Sie zunächst für ν_S^2 eine ausgleichende Horizontale, für ν_{ST}^2 eine Gerade ein, welche die Messpunkte optimal verbindet. Bestimmen Sie die Steigung S dieser Geraden und berechnen Sie hieraus G

$$G = 4\pi\, l_T\, I\, S$$

Für die eingespannte Länge der Torsionsstäbe ist ein mittlerer Wert $l_T = 0{,}32$ m zu benutzen.

Zeichnen Sie danach zwei Ausgleichsgeraden $\nu_{ST}^2(R^4)$ mit maximaler und minimaler Steigung S so in den Graphen, dass noch alle Fehlerrechtecke getroffen werden. Bestimmen Sie aus diesen Steigungen G_{max} und G_{min} und hieraus den Fehler

$$\Delta G = G_{max} - G \approx G - G_{min}$$

Vergleichen Sie das Ergebnis $G \pm \Delta G$ mit Literaturdaten für den Schubmodul:

Messing	($Cu_{60}Zn_{40}$)	G = 36 GPa	(1 GPa = 10^9 N/m^2)
Kupfer		G = 45 GPa	
Edelstahl	(FeNiCr)	G = 65 GPa	

Diskutieren Sie das Messergebnis auch hinsichtlich weiterer möglicher Fehler.

7. Fragen zur Selbstkontrolle

1) Was ist der Unterschied zwischen einem *physischen* und einem *mathematischen* Pendel?

2) Wie lauten die Bewegungsgleichungen dieser Pendel?

3) Wovon sind die *Eigenfrequenzen* eines physischen bzw. eines mathematischen Pendels abhängig?

4) Ist die *Periodendauer* eines Pendels von der Auslenkung abhängig?

5) Wie bestimmt man mit einem mathematischen Pendel die Erdbeschleunigung?

6) Wieviel *Eigenfrequenzen* besitzen zwei gekoppelte Pendel?

7) Welche speziellen *Schwingungsformen* besitzen zwei gekoppelte Pendel?

8) Wie kann aus den Schwingungen der Pendel im vorliegenden Versuch ihr *Trägheitsmoment* I, wie der *Schubmodul* G der Torsionsstäbe ermittelt werden?