Prof. Dr. M. Horn-von Hoegen
Fachbereich Physik
Universität Duisburg-Essen

Übungen zu "Grundlagen der Physik I" **Blatt 11**

WS 2018/19

Abgabe bis 14. 01. 2019, 12:00 Uhr
Abgabebox im Kern MF, 2. Etage

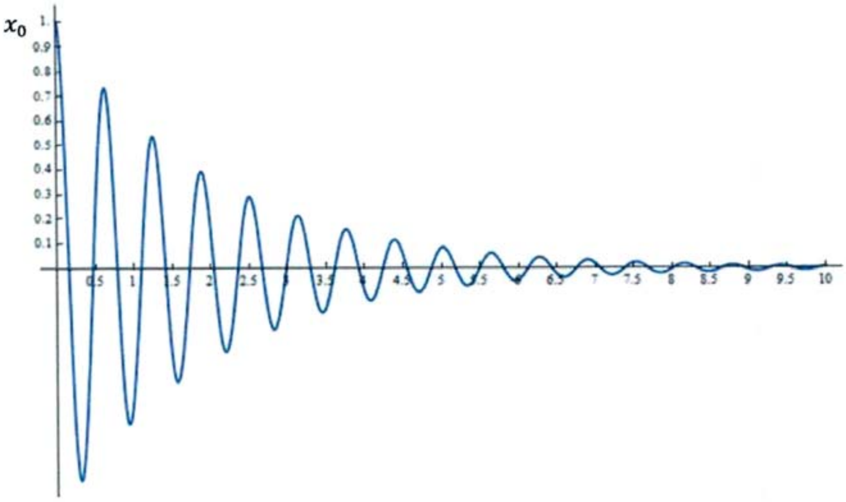
Aufgabe 1: Eulersche Formel

Die Differentialgleichung für einen freien harmonischen Oszillator kann mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ gelöst werden.

a) Zeigen Sie, dass $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ (Eulersche Formel) gilt,
b) Zeichnen Sie die Funktion $x(t)$ in einer komplexen Ebene. Was stellt x_0 dar?
c) Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die Additionstheoreme:
   i. $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
   ii. $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

Aufgabe 2: Gedämpfter Oszillator

Ein gedämpfter harmonischer Oszillator (Differentialgleichung: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$) zeigt folgendes Schwingungsverhalten:

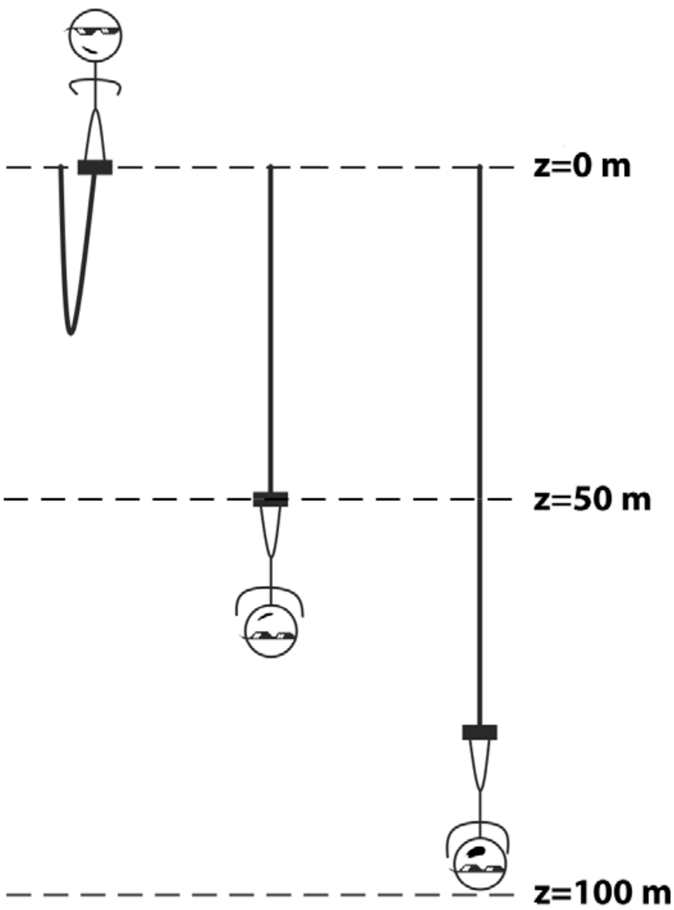


a) Ermitteln Sie aus dem Graphen die Stärke der Dämpfung γ, sowie die Periodendauer T und die Eigenfrequenz ω_0 der Schwingung.
b) Lösen Sie die Differentialgleichung des gedämpften Oszillators für den aperiodischen Grenzfall ($\gamma = \omega_0$) unter Berücksichtigung der allgemeinen Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$. Benutzen Sie dafür den Lösungsansatz $x(t) = C(t)e^{-\gamma t}$. Dabei ist *C(t)* eine noch zu bestimmende Funktion der Zeit. Betrachten Sie speziell den Fall, dass $v_0 = -2\gamma x_0$ ist und plotten Sie den Graphen $x(t)$ mit der aus a) gewonnenen Frequenz ω_0. Berechnen Sie dazu, falls vorhanden, die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte dieser Funktion.
c) Nun wird der gedämpfte Oszillator mit einer Kraft extern angeregt: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$. Plotten Sie mit den aus a) gewonnenen Größen die auf $\frac{F_0}{m}$ normierte Amplitude als Funktion der Anregungsfrequenz ω. Beschriften Sie relevante Stellen im Graphen und zeichnen Sie ggf. die Größen aus a) ein.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Bungee-Sprung

Sie haben sich in einem schwachen Moment von Ihrem Partner zu einem Bungee-Sprung überreden lassen. Nun stehen Sie zweifelnd auf einer Brücke in h = 100 m Höhe und "wollen" sich in die Tiefe stürzen. Der Betreiber des Unternehmens teilt Ihnen auf wiederholte Anfrage mit, dass das Bungee-Seil eine Länge von l = 50 m und eine Federkonstante von k = 100 N/m hat und bei bisher 10000 Sprüngen noch nie gerissen ist. Ihre eigene Masse und Größe veranschlagen Sie großzügig mit m = 75 kg und H = 1,8 m. Sie fragen sich, ob Sie diesen Sprung überleben können. Neben Ihnen bereitet sich voller Vorfreude ein 150 kg schwerer Tourist auf seinen Sprung vor. Sie haben noch ein paar Minuten bis zu Ihrem Sprung. Zeit genug für ein paar Überlegungen. Betrachten Sie das Seil als ideal elastische Feder mit dem Kraftgesetz $F(z) = -k(z - l)$) für $z \geq l$ und 0 sonst. Nehmen für diese Anwendung des Kraftgesetzes $z = 0$ auf der Brücke an.



(Strichmännchen unskaliert)

a) Betrachten Sie zunächst den ersten Abschnitt des Sprungs, in dem das Seil noch nicht gespannt ist. Nehmen Sie an, Sie erreichen $z_1 = l$ zum Zeitpunkt t_1. Berechnen Sie t_1 und $v_1 = v(t_1)$.

b) Für den nächsten Abschnitt des Sprungs, bei $t > t_1$, stellen Sie die Bewegungsgleichung aus der Kräftebilanz an der Verbindung Seil-Mensch auf.

1) Wie tief bleiben Sie nach dem Sprung und Ausklingen der Schwingung am Seil hängen?

2) Benutzen Sie die Substitution $z(t) = C + x(t)$ und den Lösungsansatz $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ für die resultierende Differentialgleichung. Benutzen Sie die Anfangsbedingungen/Randwerte $(v(t_1) = v_1, z(t_1) = l)$, um die Konstanten in diesem Lösungsansatz zu bestimmen.

c) Was ist der tiefste Punkt Ihrer Flugbahn? Was ist die höchste Beschleunigung der Sie ausgesetzt sein werden? Sollten Sie Ihre Brille abnehmen? Und wie wird es erst Ihrem Nachfolger ergehen? Möchten Sie ihm vielleicht den Vortritt überlassen? Bis zu welcher Masse ist das Seil überhaupt ausgelegt? Eine weitere Frage an den Betreiber - mal sehen, ob er sie richtig beantworten kann ...