Prof. Dr. M. Horn-von Hoegen

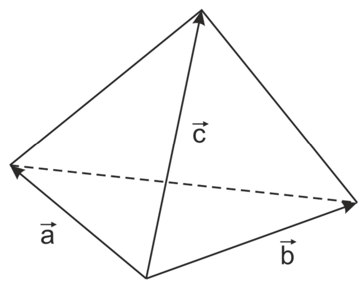
Aufgabe 1: Kreuzprodukte 5 Punkte

Das Kreuzprodukt für $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$ sei definiert durch:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \in R^3 \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten:

1. $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y} = (\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$
2. $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$
3. $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} = 0$



b) Ein (unregelmäßiger) Tetraeder werde von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt, wobei das Koordinatensystem so gewählt wird, dass gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie die zwei Seitenvektoren der Dreiecksfläche, die dem gemeinsamen Fußpunkt der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gegenüberliegt.
2. Berechnen Sie anschließend das Kreuzprodukt der zwei Seitenvektoren.

Aufgabe 2: Der Halleysche Komet 5 Punkte

Dreht sich ein Körper auf einer gebundenen Bahn um eine Sonne, bezeichnet man den sonnennächsten Punkt der Bahn als Perihel und den sonnenfernsten Punkt als Aphel.
a) „Halley“ erreicht seinen Perihel alle 76 Jahre. Benutzen Sie die Beziehung zwischen der Umlaufzeit T und der großen Halbachse der elliptischen Bahn a (3. Keplersche Gesetz), um den Betrag der großen Halbachse für den Halleyschen Kometen zu bestimmen. Geben Sie Ihr Ergebnis in Astronomischen Einheiten an $(1,5 \cdot 10^{11}\text{m} \mathrel{\hat{=}} 1\text{AE}$ m).
b) Die beobachtete minimale Entfernung r_{min} des Kometen vom Mittelpunkt der Sonne beträgt $r_{min} = 0,6$AE. Wie groß ist die maximale Entfernung r_{max}?
c) Bestimmen Sie aus r_{min} und a die Exzentrizität ϵ der Bahn.

Aufgabe 3: Der Keplersche Flächensatz 5 Punkte

Betrachten Sie die Ellipsenbahn eines Planeten um die Sonne. Wie üblich ist a die große und b die kleine Halbachse der Ellipse. ϵa ist der Abstand zwischen Sonne und Ellipsenschwerpunkt. Die Umlaufzeit ist T. Berechnen Sie (mit dem Keplerschen Flächensatz) die Zeit $T_1(T, \epsilon)$, die der Planet benötigt, um den Bogen von P nach K zu durchlaufen (s. Skizze) als Funktion von T und ϵ. Welches Ergebnis erhält man für $\epsilon = 0$?