UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Prof. Dr. M. Horn-von Hoegen
Fakultät für Physik
Universität Duisburg-Essen

Übungen zu "Grundlagen der Physik Ia" — Blatt 11

WS 2013/14

Abgabe bis 13. Januar 2014, 12:30 Uhr
Abgabebox im Kern MF, 2. Etage

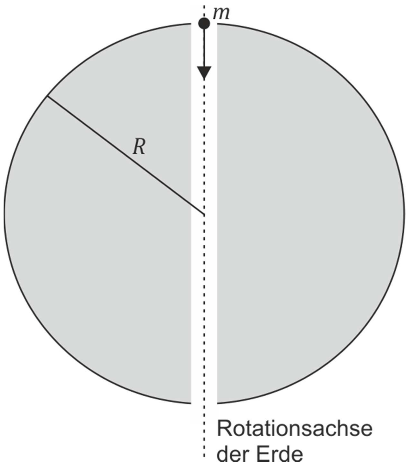
Aufgabe 1

Die Differentialgleichung für einen harmonischen Oszillator kann mit dem Ansatz $x(t) = x_0 \cdot e^{i\omega t}$ gelöst werden. Zeigen Sie,

a) dass $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ gilt. (Eulersche Formel)
b) dass $|x(t)| = x_0$ ist.
c) Zeichnen Sie die Funktion in einer komplexen Ebene. Was stellt x_0 dar?
d) Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die Additionstheoreme:
   i. $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
   ii. $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

Aufgabe 2

In dem Film „Total Recall" wurde durch die Erde ein luftleerer Tunnel getrieben. Dieser verlaufe entlang der Rotationsachse durch den Mittelpunkt der Erde von Pol zu Pol. Am nördlichen Austritt wird nun eine Transportkapsel der Masse $m = 12.400\ t$ in den Tunnel fallen gelassen. Im Film dauert der Fall durch die Erde bis zum gegenüberliegenden Pol 17 Minuten.



a) Stellen Sie unter Vernachlässigung von Reibungsverlusten die Bewegungsgleichung auf und zeigen Sie, dass dies zu einer Lösung für einen harmonischen ungedämpften Oszillator führt. Wie groß ist die Periodendauer T? Stimmt diese mit der aus dem Film überein?
b) Wie groß sind die mittlere potentielle und kinetische Energie? Der zeitliche Mittelwert einer periodischen Funktion ist durch

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} f(t')\,dt'$$

gegeben, wobei T die Periodendauer ist. Bei der Berechnung der mittleren Energien dürfen Sie für $x(t)$ nur den Realteil der Lösung verwenden.
c) Vergleichen Sie T mit der Zeitdauer für eine erdnahe Umlaufbahn im luftleeren Raum.

Hinweis: Nehmen Sie eine homogene Massenverteilung der Erde an und dass der Tunneldurchmesser vernachlässigbar klein ist. Die Kraft auf die Masse m im Tunnel ist durch den Anteil der Masse der Erde bestimmt, der sich in der Kugel unterhalb der Masse m befindet. Diese resultierende Masse kann dann als eine im Erdmittelpunkt vorhandene Punktmasse betrachtet werden. Die Anteile der Gravitation von Massen mit einem Radius, der größer als der Abstand der Masse m vom Mittelpunkt ist, heben sich auf und führen zu keiner resultierenden Kraft auf die Masse m. (siehe Demtröder, Experimentalphysik 1, Kapitel 2.9.5. „Gravitationsfeld ausgedehnter Massen")

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Eine punktförmige Masse von $2\ kg$ bewegt sich horizontal entlang der x-Achse, wobei sie zu jeder Zeit von einer Kraft mit dem Betrag $8|x|\ N$ zum Ursprung gezogen wird. Zur Zeit $t = 0\ s$ bewegt sich die Masse mit $10\ cm/s$ nach außen und befindet sich am Ort $x = 20\ cm$. Bestimmen Sie:

a) die Bewegungsgleichung der Masse.
b) den Ort der Masse zu jeder nachfolgenden Zeit $t > 0\ s$.
c) die Amplitude, die Frequenz und die Periodendauer der Schwingung.