UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Prof. Dr. M. Horn-von Hoegen
Fakultät für Physik
Universität Duisburg-Essen

Übungen zu "Grundlagen der Physik Ia" — Blatt 7

WS 2013/14

Abgabe bis 2. Dezember 2013, 12:30 Uhr
Abgabebox im Kern MF, 2. Etage

Aufgabe 1

a) Das Kreuzprodukt sei für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ definiert durch:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

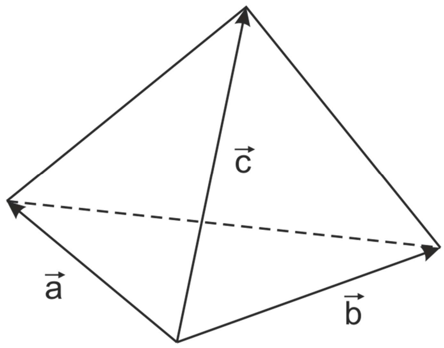
Zeigen Sie, dass für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1) $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (z \times \vec{x}) \cdot \vec{y} = (\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$
2) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$
3) $0 = (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x}$

b) Ein (unregelmäßiger) Tetraeder werde von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

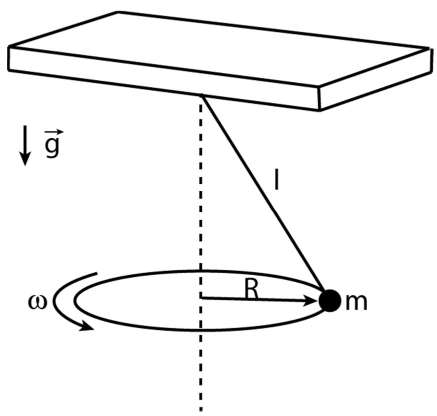
Berechnen Sie zwei Seitenvektoren der Dreiecksfläche, die dem gemeinsamen Fußpunkt der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gegenüberliegt. Berechnen Sie anschließend deren Kreuzprodukt. Die Reihenfolge der Faktoren soll so gewählt werden, dass der Produktvektor nach außen (bezogen auf das Tetraedervolumen) zeigt.



Aufgabe 2

Ein punktförmiges Teilchen der Masse m ist an einem masselosen Faden der Länge l im Schwerefeld der Erde aufgehängt. Das Teilchen umlaufe auf einer Kreisbahn mit dem Radius R die Vertikale durch den Aufhängepunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Berechnen Sie bezüglich des Aufhängepunktes:

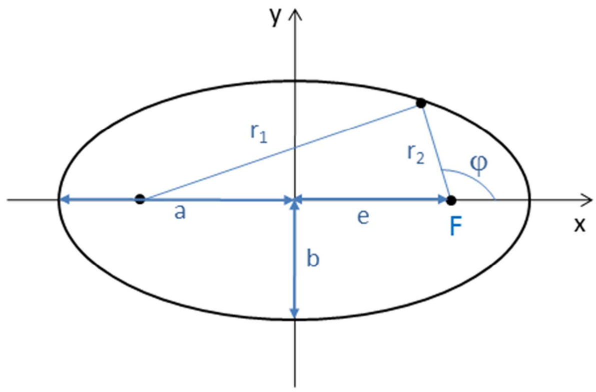
a) den Drehimpuls $\vec{L}(t)$ des Teilchens und
b) das Drehmoment $\vec{D}(t)$ der Schwerkraft auf das Teilchen.
c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\dot{\vec{L}}(t) = \vec{D}(t)$ erfüllt ist.



Bitte wenden!

Aufgabe 3

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstand von den Brennpunkten F einen festen Wert $r_1 + r_2 = 2a$ annimmt. Hierbei werden a und b als die große bzw. kleine Halbachse und e als deren lineare Exzentrizität bezeichnet.



a) Zeigen Sie, dass gilt: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Das Verhältnis $\varepsilon = {}^{e}/_{a}$ wird auch als numerische Exzentrizität bezeichnet.

b) Wählen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte der Ellipse. Verifizieren Sie, dass die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten (x, y) durch den Ausdruck $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ gegeben ist.

c) Legen Sie nun den Ursprung des Koordinatensystems in den rechten Brennpunkt der Ellipse und führen sie Polarkoordinaten (r, φ) ein. Zeigen Sie mit Hilfe des Kosinussatzes, dass die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten durch den Ausdruck $r(\varphi) = \frac{r_0}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$ mit $r_0 = a(1-\varepsilon^2)$ gegeben ist.